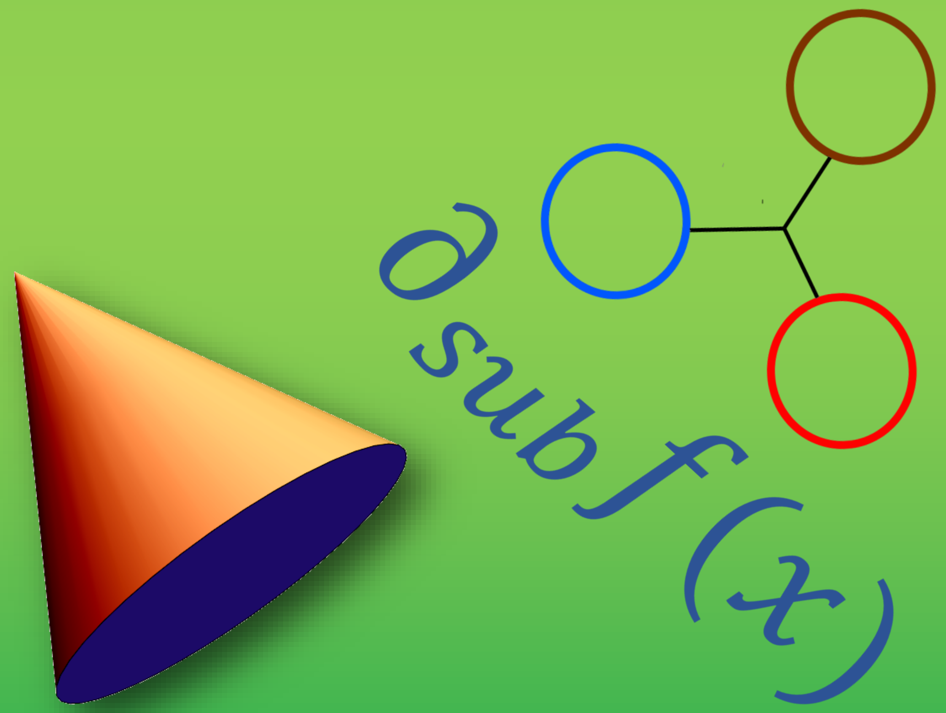
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, С. И. Смирнова

Учебно-методическое пособие

Выпуклый и негладкий анализ



Симферополь — 2017

Таврическая академия

Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского

И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин, С. И. Смирнова

Учебно-методическое пособие по курсу

«Выпуклый и негладкий анализ»

для студентов магистратуры факультета

математики и информатики Таврической академии

Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского

Симферополь — 2017

УДК 517.98

ББК 22.162

Печатается по решению Учёного совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Протокол № 23 от декабря 2015 г.

Рецензенты: Б. Д. Марянин, к.ф.-м.н., доцент (КФУ), З.З. Ситшаева, к.ф.-м.н., доцент (КИПУ).

Авторский коллектив: Разделы 1, 2 – И.В. Орлов, Ф.С. Стонякин
Раздел 3 – И. В. Орлов
Раздел 4 – И. В. Орлов, С.И. Смирнова, Ф.С. Стонякин
Раздел 5 – Ф.С. Стонякин

Справочное учебно-методическое пособие по курсу «Выпуклый и негладкий анализ» для студентов магистратуры факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского / профессор И. В. Орлов, доцент Ф. С. Стонякин, доцент С.И. Смирнова. Симферополь: КФУ, 2017

Аннотация

В пособии в достаточном для студентов объёме изложены некоторые теоретические вопросы, входящие в курс «Выпуклый и негладкий анализ» для студентов 1 и 2 курса магистратуры факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского. Основная часть посвящена новому понятию компактного субдифференциала в негладком анализе, которое исследовано в работах первых двух авторов. Подробно описаны примеры использования таких субдифференциалов в вариационных задачах с негладким интегрантом, представлены задачи для самостоятельного решения. Также рассмотрены некоторые другие классы задач выпуклого анализа – задачи о справедливом разделе ресурсов, а также задачи о нахождении кратчайших сетей на плоскости.

Содержание

1. Введение

В пособии излагаются некоторые вопросы теории и типы задач негладкого анализа в объёме, достаточном для студентов магистратуры факультета математики и информатики, изучающих курс "Выпуклый и негладкий анализ". В частности, в пособие включены наиболее важные вопросы теории компактных субдифференциалов. Более подробно эта теория исследована в работах [1] — [3].

Сделаем краткий экскурс в историю развития негладкого анализа.

Как отмечено в [4], интенсивные исследования свойств недифференцируемых функций и развитие методов недифференцируемой оптимизации начались в СССР в 60-е годы прошлого века. Такие методы предназначались, прежде всего, для решения задач линейного программирования большой размерности, возникавших при моделировании важнейших экономических, экологических (выработка производственных решений, транспортная задача, задача о распределении общих ресурсов) и других реальных явлений. Для этого в работах советских математиков В. Ф. Демьянова, Л. В. Васильева и В. Н. Малоземова, Н. З. Шора, а также Б. Н. Пшеничного, были исследованы необходимые условия экстремума некоторых классов недифференцируемых функций, а также предложены итеративные процедуры, обобщающие классические методы градиентного спуска. Отметим также более поздние работы советских математиков А. Г. Кусраева, С. С. Кутателадзе, В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова, Б. Ш. Мордуховича, а также В. С. Михалевича, А. М. Гупала и В. И. Норкина.

Исторически первыми глубоко изученными классами недифференцируемых функций были классы выпуклых функций и функций максимума. Исследование этих функций привело к развитию *выпуклого анализа* и *теории минимакса*. При этом оказалось, что основным инструментом исследования указанных классов функций является *субдифференциал*, представляющий собой обобщение понятия классического градиента (для вещественного аргумента — производной).

В США и странах Западной Европы методы недифференцируемой оптимизации начали активно изучаться в 70-е годы прошлого века. При этом отдельные работы в данном направлении, обусловленные преимущественно потребностями развития теории игр (которая используется при моделировании конкуренции в рыночной экономике), встречались и раньше. Основной областью применения методов недифференцируемой оптимизации было построение оптимальных значений целевых функций в задачах дискретной оптимизации. Наряду с численными алгоритмами, исследовались свойства обобщённых градиентов (или субдифференциалов) и полученные на их основе условий оптимальности. Позднее круг приложений негладкого анализа существенно расширился. Широко известны разработки в данной области Р. Рокафеллара, Ф. Кларка, Дж. Варги, Ф. Мишеля и Ж.-П. Пено, Ж.-П. Обена, А. Д. Иоффе и Ж.-П. Пено, Дж. Борвейна и др.

Обзор наиболее известных результатов негладкого анализа можно найти в [5] — [7], а также имеющейся там библиографии.

С целью применения к исследованию проблемы Радона–Никодима для интеграла Бохнера, И. В. Орловым несколько лет назад был введен и в совместных работах с Ф. С. Стонякиным подробно изучен компактный субдифференциал (K–субдифференциал) для отображений вещественного аргумента в ЛВП. В случае пространств Фреше K–субдифференциал оказался адекватным инструментом и позволил найти топологическое решение проблемы Радона–Никодима.

Естественным образом возник вопрос о переносе понятия на случай векторного аргумента. Вопрос диктуется не только внутренней логикой теории, но и соображением (возможно, более важным) о приложениях в вариационном исчислении. Приложения субдифференциалов к вариационным задачам с негладким интегрантом составляют неотъемлемую часть современного негладкого анализа. Характерно, что в новейшей математической классификации MSC–2010 раздел "Негладкий анализ"входит в блок "Вариационное исчисление".

Движение по намеченному пути сразу же приводит нас от K–субдифференциала как компактного выпуклого множества (случай фиксированного направления) к многозначному субаддитивному оператору с компактными выпуклыми значениями (K–оператору). Таким образом, возникает потребность хотя бы в минимальном аппарате теории K–операторов.

Дуальная трудность состоит в том, что ограниченные K–операторы образуют не банахово пространство, а так называемый банахов конус, который не содержится ни в каком банаховом пространстве. Теория абстрактных локально выпуклых конусов возникла сравнительно недавно а описание абстрактных нормированных конусов также оказалось новой задачей. Таким образом, обрисовались рамки существенно нового подхода, в котором место дифференциала Фреше (линейного оператора) занимает K–субдифференциал Фреше (многозначный сублинейный оператор). При этом место банахова пространства линейных ограниченных операторов занимает банахов конус ограниченных K–операторов.

Соответствующая функциональная база описана во третьем разделе настоящей работы. Она включает в себя элементы теории абстрактных нормированных конусов, общей теории сублинейных операторов и функционалов, теории сублинейных K–операторов и K–функционалов.

На этой основе построено К–субдифференциальное исчисление первого порядка. Отметим, что здесь, помимо необходимого технического аппарата, описан удобный для приложений новый класс субгладких отображений, которые заведомо К–субдифференцируемы. Установлено также, что любое К–субдифференцируемое на отрезке отображение почти всюду дифференцируемо в обычном смысле.

Примененный подход позволяет без труда дать индуктивное определение К–субдифференциалов второго и высших порядков, получить аналоги основных результатов классического анализа Фреше, от теоремы Юнга до формулы Тейлора и теории экстремумов (включая достаточные условия).

В настоящем пособии в справочном формате изложены полученные результаты, а также детально рассмотрены приложения К–субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с субгладким интегрантом (одномерный случай). Приводятся субгладкие аналоги основной вариационной леммы, уравнения Эйлера–Лагранжа, простого и усиленного условий Лежандра, а также условий Лежандра–Якоби для основного вариационного функционала. Предложено множество примеров, некоторые из которых разобраны. Этот материал — существенное подспорье для студентов при изучении курса "Выпуклый и негладкий анализ".

В завершении пособия кратко изложены результаты исследований второго автора в области задач о разделе сокровищ (ресурсов), а также задач о нахождении кратчайших сетей на плоскости. Эти результаты связаны с некоторыми вопросами выпуклого анализа — теорией выпуклости образов векторных мер, а также субдифференциальным исчислением выпуклых функций.

Финансовая поддержка. Книга издается за счет средств гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук, код проекта МК-2915.2015.1.

2. Компактные субдифференциалы в банаховых конусах

2.1 Сублинейные операторы в нормированных конусах.

2.1.1 Абстрактные нормированные конусы и их свойства. Конус выпуклых компактов.

Перенос понятия K-субдифференциала на случай отображений векторного аргумента приводит к сублинейным операторам с компактными выпуклыми значениями. Такие операторы образуют уже не линейное пространство, а выпуклый (абстрактный) конус. Таким образом, построение замкнутого K–субдифференциального исчисления, включающего субдифференциалы высших порядков, приводит к необходимости с самого начала работать в рамках нормированных конусов. Эта теория была развита в работах первого из авторов и З. И. Халиловой.

Мы рассматриваем здесь только *выпуклые конусы.* Напомним общее определение.

Определение 2.1. *Конусом (выпуклым) назовем некоторое множество векторов $X = \{x\}$, снабженное операциями сложения векторов и умножения на неотрицательные скаляры. При этом операции обладают следующими свойствами:*

(i) $(x + y) + z = x + (y + z);\ x + y = y + x \quad (\forall\, x, y, z \in X)$;

(ii) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x;\ \ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x;\ \ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
$(\forall x,\ y \in X\ \forall\lambda \geq 0,\ \mu \geq 0)$.

Замечание 2.1. Тривиальным примером конуса служит вещественное векторное пространство. В большинстве публикаций рассматриваются конусы, вложенные в векторные пространства (см. [1], [3]). Однако, начиная с 80–х годов прошлого века, активно исследуются и абстрактные конусы, разрабатывается общая теория локально выпуклых конусов (см. [1], [3]). По известному критерию («cancellation law»), выпуклый конус X может быть изоморфно вложен в некоторое векторное пространство тогда и только тогда, когда $(x + z = y + z) \Rightarrow (x = y)$ для любых $x, y, z \in X$. Простейший пример абстрактного выпуклого конуса —- конус всех непустых выпуклых подмножеств векторного пространства.

Тем не менее, теория нормированных конусов, основанная на общей теории локально выпуклых конусов, не обнаружена нами в литературе. Эта теория, как вспомогательный блок, изложена в данном параграфе.

Дадим определение *нормированного конуса.*

Определение 2.2. *Выпуклый конус X назовем нормированным, если для любого его элемента $x \in X$ определена неотрицательная величина (конус–норма) $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:*

(i) $(\|x\| = 0) \Longleftrightarrow (x = 0)$;

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(iii) $\|\lambda \cdot x\| = \lambda \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \geq 0)$.

Конус–норма индуцирует *локально выпуклую конус-топологию* в X, и, в частности, приводит к следующим понятиям.

Определение 2.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный конус. Введем понятия:*

а) ε *–окрестность точки* $x \in X : O_\varepsilon(x) = \{x + h |\, h \in X,\ \|h\| < \varepsilon\}$;

б) Сходящаяся последовательность $x_n \to x : \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ (n \geq N) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_n \in O_\varepsilon(x))$;

в) Квазифундаментальная последовательность $\{x_n\}$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(n \geq N, p \geq 0) \Rightarrow (x_n \in O_\varepsilon(x_{n+p}));$$

г) Квазиполнота: X — квазиполный конус, если любая квазифундаментальная последовательность в X сходится. Квазиполный нормированный конус будем называть банаховым конусом.

д) Квазиметрика: если $y = x + h$, то полагаем $d(x, y) = \|h\|$;

е) Ограниченность: множество $B \subset X$ ограничено, если $\sup\limits_{x \in B} \|x\| < +\infty$.

Общие топологические понятия вводятся в X обычным образом.

Замечание 2.2. Конус–норма (как и вообще конус–топология) порождает не классическую равномерность в X, а лишь «направленную» *квазиравномерность*. В частности, квазиметрика, вообще говоря, не симметрична: если существует $d(x, y)$, то $d(y, x)$ может не существовать.

Важный для нас тип конусов образуют *конусы компактных выпуклых подмножеств.* Отметим, что в таких конусах выполняется *cancellation law*, и, следовательно, конус выпуклых компактов можно погрузить в некоторое линейное пространство.

Определение 2.4. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *— нормированный конус. Обозначим через* X_K *множество всех компактных выпуклых подмножеств* X*. Нетрудно проверить, что* X_K *образует выпуклый конус относительно поэлементного сложения множеств и умножения на неотрицательные скаляры. Нулем в* X_K *является множество* $\{0\}$.

Замечание 2.3. 1) В конусе X_K возможно, например, (в случае векторного пространства X) умножение и на отрицательные скаляры, однако $(-1)\cdot C$ не есть противоположный элемент к C.
2) Конус X_K индуктивно упорядочен отношением вложения.
3) Вообще говоря (при $X \not\subset \mathbb{R}$) конус X_K не удовлетворяет "cancellation law".

Введем норму в X_K : $\quad \|C\| = \sup\limits_{x\in C} \|x\|$.

Замечание 2.4. Легко видеть, что $\|C\|$ обладает всеми свойствами конус-нормы и согласована с отношением порядка в X_K.

Оказывается, что квазиполнота конуса X влечет квазиполноту и конуса X_K.

Теорема 2.1. *Если* X *— банахов конус, то нормированный конус* X_K *— также банахов.*

Замечание 2.5. Простейшим примером банахова конуса X_K является конус

$$\mathbb{R}_K = \Big\{[x_1; x_2] \subset \mathbb{R} \;\Big|\; x_1 \le x_2\Big\}.$$

Это единственный (в классе банаховых пространств X) пример конечномерного конуса X_K. Конус $\mathbb{R}_K$ можно отождествить с полуплоскостью

$$\mathbb{R}^2_+ = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_1 \le x_2\Big\}.$$

При этом порядок в $\mathbb{R}^1_+$, соответствующий вложению в $\mathbb{R}_K$, следующий:

$$\Big((x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)\Big) \Longleftrightarrow \Big(y_1 \le x_1,\; y_2 \ge x_2\Big).$$

Заметим, что этот порядок не соответствует обычному порядку в $\mathbb{R}$ при диагональном вложении

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2_+ \quad (x \in \mathbb{R} \mapsto (x, x) \in \mathbb{R}^2_+).$$

В общем случае также, индуктивный порядок в X_K, определяемый вложением, не связан с возможным исходным порядком в X.

Замечание 2.6. В случае индуктивно упорядоченного конуса X, будем говорить, что конус–норма в X *согласована с порядком*, если $(x_1 \le x_2) \Rightarrow (\|x_1\| \le \|x_2\|)$. В этом случае возможна более грубая топология, также порождаемая нормой:

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X |\; x \preceq y \preceq x + h;\; \|h\| < \varepsilon\}.$$

2.1.2 Сублинейные операторы и функционалы.

Использование сублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями удобнее проводить на основе достаточно развитой общей теории сублинейных операторов со значениями в упорядоченном конусе. Такое развитие общей теории сублинейных операторов излагается здесь впервые. Оно далеко не полно, но это тот минимум, который позволяет далее достаточно свободно строить основной аппарат K–субдифференциального исчисления.

Определение 2.5. *Пусть E — выпуклый конус, F — индуктивно упорядоченный выпуклый конус. Оператор $A : E \to F$ назовем сублинейным, если:*
(i) $A(h_1 + h_2) \preceq Ah_1 + Ah_2$;
(ii) $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$; $(\forall h_1, h_2 \in E, \forall \lambda \geq 0)$.
Оператор A назовем надлинейным, если условие (i) заменить условием
(iii) $A(h_1 + h_2) \succeq Ah_1 + Ah_2$.

Определение 2.6. *Пусть, в условиях определения 2.5, $F = \mathbb{R}$. Тогда сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}$ назовем сублинейным функционалом. В этом случае условия (i)–(ii) перепишутся в виде:*
(iv) $\quad f(h_1 + h_2) \leq f(h_1) + f(h_2)$; $f(\lambda h) = \lambda \cdot f(h) \quad (\lambda \geq 0)$.

Соответственно, для надлинейного функционала первое из неравенств (iv) заменяется неравенством:

(v) $\quad f(h_1 + h_2) \geq f(h_1) + f(h_2)$.

Замечание 2.7. 1) Иногда в определении сублинейного оператора равенство (ii) заменяется неравенством $A(\lambda h) \preceq \lambda \cdot Ah$. У нас не возникнет потребность в таком ослаблении условия, т. к. K–субдифференциал всегда обладает свойством (ii).

2) Очевидно, сублинейность функционала f равносильна надлинейности функционала $(-f)$. Простейшим примером сублинейного функционала в нормированном конусе служит сама норма: $f(h) = \|h\|$.

В случае векторного пространства E легко описать связь сублинейности и линейности функционалов.

Теорема 2.2. *Пусть E — векторное вещественное пространство, $f : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный (соответственно — надлинейный) функционал. Тогда f линеен в том и только в том случае, если*

$$(f(-h) = -f(h) \quad (\forall h \in E)). \tag{2.1}$$

Результат переносится и на сублинейные операторы $A : E \to F$, если F — упорядоченное векторное пространство.

Введем теперь для произвольных отображений в нормированных конусах понятия непрерывности и полунепрерывности.

Определение 2.7. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $\Phi : E \to F$ определено в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in E$. Назовем Φ непрерывным в точке x, если*

$$\exists y \, \forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, (\|h\| < \delta) \Longrightarrow (\Phi(x+h) = \Phi(x) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon).$$

Пусть, кроме того, конус F индуктивно упорядочен и норма в F согласована с порядком. Назовем отображение Φ полунепрерывным сверху в точке x, если

$$\exists y \, \forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, (\|h\| < \delta) \Longrightarrow (\Phi(x+h) \preceq \Phi(x) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon);$$

Φ *полунепрерывно снизу в точке x, если*

$$\exists y \, \forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, (\|h\| < \delta) \Longrightarrow (\Phi(x) \preceq \Phi(x+h) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon).$$

Замечание 2.8. Одновременная полунепрерывность сверху и снизу равносильна полной непрерывности Φ лишь в случае, когда F векторное пространство (в частности, для функционалов). В общем же случае мы можем только утверждать, что из полной непрерывности следует полунепрерывность сверху. Возможно, здесь следует ввести «ко–непрерывность» с условием: $\Phi(x) = \Phi(x+h)+y, \ \|y\| < \varepsilon$.

Обратимся теперь к вопросу о непрерывности сублинейных операторов. Вначале введем для них понятие *нормы*. Далее, E и F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен (согласованно с нормой: $(y_1 \preceq y_2) \Rightarrow (\|y_1\| \preceq \|y_2\|)$).

Определение 2.8. *Пусть оператор $A : E \to F$ — сублинейный. Положим (по аналогии с линейным случаем): $\|A\| := \sup\limits_{\|h\| \le 1} \|Ah\|$. Если $\|A\| < +\infty$, назовем оператор A ограниченным.*

Нетрудно проверить сохранение обычных свойств операторной нормы (с учетом $\lambda \ge 0$).

Предложение 2.1. *Пусть $A(A_i) : E \to F$ — сублинейные ограниченные операторы. Тогда: (i)* $(\|A\| = 0) \Longleftrightarrow (A = 0)$; *(ii)* $\|A_1 + A_2\| \le \|A_1\| + \|A_2\|$; *(iii)* $\|\lambda \cdot A\| = \lambda \cdot \|A\| \ (\lambda \ge 0)$.

Замечание 2.9. Свойства сублинейной операторной нормы позволяют ввести *нормированный операторный конус* $L_{sub}(E;F)$ ограниченных сублинейных операторов $A : E \to F$. Конус $L_{sub}(E;F)$ индуктивно упорядочен отношением $(A_1 \preceq A_2) \Longleftrightarrow (A_1 h \preceq A_2 h\ (\forall h \in E))$. Важным обстоятельством является то, что, в случае банахова конуса F, конус $L_{sub}(E;F)$ — также банахов.

Теорема 2.3. *Пусть E и F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен. Тогда конус $L_{sub}(E;F)$ также нормированный. Если, кроме того, конус F — банахов, то $L_{sub}(E;F)$ — также банахов конус.*

Выясним связь ограниченности сублинейного оператора с его непрерывностью. Она отличается от классического линейного случая.

Теорема 2.4. *Для сублинейного оператора $A : E \to F$ следующие условия равносильны:*

(i) $\|A\| < \infty$;

(ii) A непрерывен в нуле;

(iii) A равномерно полунепрерывен сверху на E.

Замечание 2.10. По аналогии с линейным случаем, нетрудно доказать, что все сублинейные функционалы $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ автоматически ограничены.

Перейдем к общим свойствам сублинейных ограниченных операторов. Вначале рассмотрим вопрос о сублинейной композиции и сублинейных операторных матрицах.

Теорема 2.5. *Пусть E, F, G — нормированные конусы, причем F и G индуктивно упорядочены. Если $A \in L_{sub}(E;F)$, $B \in L_{sub}(F;G)$, то композиция $B \cdot A \in L_{sub}(E;G)$, причем*

$$\|B \cdot A\| \leq \|A\| \cdot \|B\|. \tag{2.2}$$

Перейдем к вопросу о матрице сублинейных операторов. Далее подразумевается, что *прямая сумма* $E = \bigoplus_{j=1}^{n} E_j$ и декартово произведение $F = \prod_{i=1}^{m} F_i$ нормированных конусов определяются аналогично случаю нормированных пространств. Вначале рассмотрим вопрос о *разложении сублинейного оператора в прямую сумму*; он отличается от случая нормированных пространств.

Предложение 2.2. *Пусть* E_j $(j=\overline{1,n})$ *и* F *— нормированные конусы,* $A \in L_{sub}\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} E_j; F\Big)$. *Обозначим* $P_j : E \to E_j$ *канонические проекции, и положим* $A_j = A \cdot P_j$ $(j=\overline{1,n})$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\Big(A \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} A \cdot P_j\Big) \Longleftrightarrow \Big(Ah \preceq \sum_{j=1}^{n} A_j h_j \quad (\forall\, h = h_1 + ... + h_n \in E)\Big).$$

Перейдем к вопросу о *покоординатном разложении сублинейного оператора*; здесь равенство сохраняется.

Предложение 2.3. *Пусть* E *и* F_i $(i=\overline{1,m})$ *— нормированные конусы,* $A \in L_{sub}\Big(E; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. *Обозначим* $Q_i : F_i \to F$ *канонические инъекции и положим* $A^i = Q_i \cdot A$ $(i=\overline{1,m})$. *Тогда справедливо равенство:*

$$\Big(A = (A^i)_{i=1}^{m} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot A\Big) \Longleftrightarrow \Big(Ah = (A^i h)_{i=1}^{m} \quad (\forall h \in E)\Big).$$

Из результатов предложений 2.2 и 2.3 следует общее утверждение о разложении сублинейного оператора в матрицу.

Теорема 2.6. *Пусть* E_j $(j=\overline{1,n})$ *и* F_i $(i=\overline{1,m})$ *— нормированные конусы,* $A \in L_{sub}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} E_j; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. *Обозначим, как и ранее, через* $P_j : E \to E_j$ *и* $Q_i : F_i \to F$ *соответствующие канонические проекции и инъекции, и положим* $A_{ij} = Q_i A P_j$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\Big(A \preceq (A_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Q_i \cdot A \cdot P_j\Big) \Longleftrightarrow \Big(Ah \preceq \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} h_j\Big)_{i=1}^{m}$$

$$(\forall h = h_1 + ... + h_n \in E)\Big).$$

Введем теперь бисублинейные операторы и выпишем аналог известного изоморфизма между пространствами линейных и билинейных операторов.

Определение 2.9. *Пусть* E_1, E_2, F *— выпуклые конусы,* F *индуктивно упорядочен. Оператор* $B : E_1 \times E_2 \to F$ *назовем бисублинейным, если он сублинеен по каждой переменной в отдельности, т. е.*

(i) $B(h_1 + h_2, k) \preceq B(h_1, k) + B(h_2, k); \quad B(h, k_1 + k_2) \preceq B(h, k_1) + B(h, k_2);$

(ii) $B(\lambda h, k) = \lambda \cdot B(h, k); \quad B(h, \mu k) = \mu \cdot B(h, k)$ $(\lambda,\, \mu \geq 0)$.

Определение 2.10. *Пусть, в условиях определения 2.9, конусы* E_1, E_2, F *нормированы. Введем норму бисублинейного оператора* B *равенством:*

$$\|B\| = \sup_{\|h\|\leq 1,\, \|k\|\leq 1} \|B(h,k)\|.$$

Если $\|B\| < \infty$, *назовем оператор* B *ограниченным.*

По аналогии с предложением 2.1 и теоремой 2.4, сформулируем свойства нормы бисублинейного оператора и связь его ограниченности с непрерывностью.

Теорема 2.7. *В условиях определений 2.9-2.10 верно:*

(i) $(\|B\| = 0) \Leftrightarrow (B = 0)$;

(ii) $\|B_1 + B_2\| \leq \|B_1\| + \|B_2\|$;

(iii) $\|\lambda \cdot B\| = \lambda \cdot \|B\| \quad (\forall\, \lambda \geq 0)$;

(iv) $\|B(h,k)\| \leq \|B\| \cdot \|h\| \cdot \|k\|$.

Для бисублинейного оператора $B : E_1 \times E_2 \to F$ *следующие условия равносильны:*

а) $\|B\| < \infty$;

б) B *непрерывен в нуле;*

в) B *равномерно полунепрерывен сверху на* $E_1 \times E_2$.

Замечание 2.11. Свойства нормы бисублинейного оператора позволяют, по аналогии с сублинейным случаем, ввести нормированный операторный конус, индуктивно упорядоченный отношением

$$(B_1 \preceq B_2) \Longleftrightarrow (B_1(h,k) \preceq B_2(h,k)) \quad (\forall h \in E_1,\, k \in E_2).$$

Обозначим его $L_{sub}(E_1, E_2; F)$.

Теорема 2.8. *Если* $E_1, E_2; F$ *— нормированные конусы,* F *индуктивно упорядочен, то конус* $L_{sub}(E_1,\, E_2;\, F)$ *— также нормированный и индуктивно упорядоченный. При этом, если* F *–– банахов конус, то конус* $L_{sub}(E_1,\, E_2;\, F)$ *— также банахов.*

Наконец, справедлив аналог классической изометрии между пространством линейных и билинейных ограниченных операторов.

Теорема 2.9. *В условиях и обозначениях теоремы 2.8 имеет место изометрия:*

$$L_{sub}(E_1, E_2; F) \cong L_{sub}(E_1; L_{sub}(E_2; F)), \tag{2.3}$$

которая устанавливается с помощью биекции

$$(B : E_1 \times E_2 \to F) \longleftrightarrow (A_B : E_1 \to L_{sub}(E_2; F)),\ (A_B h)k = B(h, k).$$

Замечание 2.12. Нетрудно аналогичным образом ввести понятие полисублинейного оператора $P : E_1 \times ... \times E_n \to F$, его нормы, а также нормированный упорядоченный конус полисублинейных ограниченных операторов $L_{sub}(E_1, ...E_n; F)$. Аналог изометрии (2.3) имеет вид:

$$L_{sub}(E_1, ..., E_n; F) \cong L_{sub}(E_1; L_{sub}(E_2, ..., E_n; F)). \tag{2.4}$$

Далее, в случае $E_1 = ... = E_n$, левую часть (2.4) будем кратко обозначать $L^n_{sub}(E; F)$.

Замечание 2.13. Используя определение 2.9, нетрудно задать бисублинейный оператор

$$B : \Big(\prod_{i=1}^{n} E_i^1\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{m} E_j^2\Big) \longrightarrow F$$

как бисублинейную операторную матрицу $B = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, где

$$B_{ij} \in L_{sub}(E_i^1, E_j^2; F) \cong L_{sub}(E_i^1; L_{sub}(E_j^2; F)).$$

В частности, в теории K–субдифференциалов для нас особенно будет важен случай квадратной бисублинейной "матрицы Гессе" :

$$B = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}, \quad B : \Big(\prod_{i=1}^{n} E_i\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{n} E_j\Big) \longrightarrow F$$

2.1.3 Сублинейные K–операторы и K–функционалы.

Здесь мы опишем важный тип сублинейных операторов, которые возникают далее в работе при общем определении компактных субдифференциалов. Начнем с общих определений.

Определение 2.11. *Пусть E — выпуклый конус, F — нормированный конус, F_K — нормированный упорядоченный конус выпуклых компактных подмножеств F (см. определение 2.4). Сублинейный оператор $A : E \to F_K$ назовем сублинейным K–оператором, или, коротко, K–оператором.*

Сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}_K$ назовем сублинейным K–функционалом, или, коротко, K–функционалом. В случае нормированного конуса E, банахов конус сублинейных ограниченных K–операторов $L_{sub}(E; F_K)$ будем более коротко обозначать $L_K(E; F)$; банахов конус сублинейных ограниченных K–функционалов $L_{sub}(E; \mathbb{R}_K) = L_K(E; \mathbb{R})$ более коротко обозначим E_K^*.

Замечание 2.14. Если F — нормированное пространство, то для K–операторов из $L_K(E; F)$ можно ввести умножение на отрицательные скаляры:
$((-\lambda) \cdot A)h = -A(\lambda h)$ $(\lambda \geq 0)$, а также *«скалярную разность»* K–операторов: $A - B = A + (-1) \cdot B$.
При этом $\| - A\| = \|A\|$, $\|A - B\| \geq | \, \|A\| - \|B\| \, |$, однако вообще говоря,
$(A - B) + B \neq A$.

Для сублинейных K–функционалов возможно точное описание.

Теорема 2.10. *Пусть E — выпуклый конус, $f : E \to \mathbb{R}_K$. Тогда f — сублинейный K–функционал в том и только в том случае, если*

$$f(h) = [\underline{f}(h); \overline{f}(h)],$$

где $\underline{f} : E \to \mathbb{R}$ — надлинейный функционал, $\overline{f} : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, $\underline{f}(h) \leq \overline{f}(h)$ $(\forall h \in E)$.

При этом, в случае нормированного конуса E, K–функционал $f = [\underline{f}; \overline{f}]$ ограничен в том и только в том случае, если $\underline{f}$ равномерно полунепрерывен снизу на E, $\overline{f}$ равномерно полунепрерывен сверху на E.

Замечание 2.15. Отметим также, что для любого K–функционала (не только суб– или надлинейного) $f = [\underline{f}; \overline{f}] : E \to \mathbb{R}_K$ свойство *полунепрерывности сверху* в точке $x \in E$ можно записать в следующем виде:

$$\underline{f}(x) \leq \varliminf_{n \to 0} \underline{f}(x + h) \leq \varlimsup_{n \to 0} \overline{f}(x + h) \leq \overline{f}(x).$$

Приведем простой класс примеров сублинейных ограниченных K–функционалов.

Пример 2.1. Пусть E — нормированное пространство, $\mathcal{C}$ — выпуклый компакт в E^* (в сильной топологии). Положим

$$f_{\mathcal{C}}(h) = \mathcal{C} \cdot h. \tag{2.5}$$

Тогда $f_{\mathcal{C}} \in E_K^*$, $\|f_{\mathcal{C}}\| = \|\mathcal{C}\|$. В случае, если E – вещественное гильбертово пространство, можно взять $\mathcal{C} \subset E$ и положить $f_{\mathcal{C}}(h) = (\mathcal{C}, h)$. В частности, при $E = \mathbb{R}$ имеем $f_{[a;b]}(h) = [a; b] \cdot h$.

Отметим, что K–функционал допускает представление:

$$f_{\mathcal{C}}(h) = [\underline{f}_{\mathcal{C}}(h); \overline{f}_{\mathcal{C}}(h)], \ \text{ где } \underline{f}_{\mathcal{C}}(h) = \min(\mathcal{C} \cdot h), \ \overline{f}_{\mathcal{C}}(h) = \max(\mathcal{C} \cdot h).$$

Построенный пример нетрудно обобщить на K*–операторы конечного ранга* $A : E \to \mathbb{R}^n_K$:

$$Ah = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{C}_i \cdot h) \quad (\mathcal{C}_i \subset E^*),$$

а также на K–операторы со значениями в $(l_p)_K$, $p \geq 1$:

$$Ah = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{C}_i \cdot h) \quad (\mathcal{C}_i \subset E^*, \ \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathcal{C}_i\|^p < +\infty).$$

Помимо рассмотренных в п.2.1.2 общих свойств сублинейных операторов, опишем некоторые специальные свойства сублинейных K–операторов. Вначале введем понятие K*–композиции.*

Определение 2.12. *Пусть* E, F, C *— нормированные конусы,* $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$. K*–композицией* $[B \cdot A]$ K*–операторов* A *и* B *назовем многозначное отображение:*

$$[B \cdot A]h = \overline{co}\Big(\bigcup_{k \in Ah} Bk \Big).$$

Имеет место следующий неочевидный факт.

Теорема 2.11. *Если* $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$, *то* $[B \cdot A] \in L_K(E; G)$. *При этом выполнено неравенство:*

$$\|[B \cdot A]\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Замечание 2.16. Нетрудно аналогичным образом ввести *бисублинейные* K–операторы $B : E_1 \times E_2 \to F_K$. В этом случае каноническая изометрия между упорядоченными конусами бисублинейных и сублинейных операторов (2.3) принимает вид: $L_K(E_1, E_2; F) \cong L_{sub}(E_1; L_K(E_2; F))$, а в случае полисублинейных операторов: $L_K(E_1, ..., E_n; F) \cong L_{sub}(E_1; L_K(E_2, ..., E_n; F))$.

Перейдем к вопросу о матрице сублинейных K-операторов. Вначале рассмотрим вопрос о *разложении сублинейного*K*–оператора в прямую сумму*; здесь сохраняется результат предложения 2.2.

Предложение 2.4. *Пусть* E_j $(j=\overline{1,n})$ *и* F — *нормированные конусы,* $A\in L_K\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n}E_j;F\Big)$. *Обозначим* $P_j:E\to E_j$ *канонические проекции, и положим* $A_j=A\cdot P_j$ $(j=\overline{1,n})$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\Big(A\preceq\bigoplus_{j=1}^{n}A_j=\sum_{j=1}^{n}A\cdot P_j\Big)\Longleftrightarrow\Big(Ah\preceq\sum_{j=1}^{n}A_jh_j\quad(\forall\, h=h_1+...+h_n\in E)\Big).$$

Перейдем к вопросу о *покоординатном разложении сублинейного* K–*оператора.* Здесь удобнее перейти к так называемому K–*набору* координатных операторов.

Предложение 2.5. *Пусть* E *и* F_i $(i=\overline{1,m})$ — *нормированные конусы,* $A\in L_K\Big(E;\prod\limits_{i=1}^{m}F_i\Big)$. *Обозначим* $Q_i:F_i\to F$ *канонические инъекции и положим* $A^ih=Q_i\cdot(Ah)$ $(i=\overline{1,m})$. *Введем "*K*–набор"* K*–операторов* $A^i:E\to(F_i)_K$*:*

$$(A^1,...,A^m)_Kh=\prod_{i=1}^{m}(A^ih)\in\Big(\prod_{i=1}^{m}F_i\Big)_K.$$

Тогда справедлива оценка:

$$\Big(A\preceq(A^1,...,A^m)_K\Big)\Longleftrightarrow\Big(Ah\subset\prod_{i=1}^{m}(A^ih)\Big).$$

При этом прямоугольная оценка точна по проекциям: $P^i(Ah)=A^ih$ $(i=\overline{1,m})$.

Из результатов предложений 2.2 и 2.3 следует общее утверждение о разложении сублинейного K–оператора в так называемую K–матрицу.

Теорема 2.12. *Пусть* E_j $(j=\overline{1,n})$ *и* F_i $(i=\overline{1,m})$ — *нормированные конусы,* $A\in L_K\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}E_j;\prod\limits_{i=1}^{m}F_i\Big)$. *Обозначим, как и ранее, через* $P_j:E\to E_j$ *и* $Q_i:F_i\to F$ *соответствующие канонические проекции и инъекции, и положим* $A_{ij}h_j=Q_i(AP_jh)$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\Big(A\preceq(A_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}:=\Big(\sum_{j=1}^{n}Q_i\cdot(AP_j)\Big)_K^{i=\overline{1,m}}\Longleftrightarrow\Big(Ah\subset\Big(\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}h_j\Big)\Big).$$

Опишем детально частный случай K–матриц для *сублинейных* K–*функционалов и* K–*операторов конечного ранга.* Вначале опишем разложение в прямую сумму K–функционалов.

Предложение 2.6. *Пусть E_j $(j=\overline{1,n})$ — нормированные конусы, $f=[\underline{f};\overline{f}]\in\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n}E_j\Big)^*_K$. Положим*

$$f_j=f\cdot P_j=[\underline{f}\cdot P_j;\overline{f}\cdot P_j]=[\underline{f_j};\overline{f}_j]\quad(j=\overline{1,n}).$$

Тогда справедлива оценка:
$\Big(f\preceq\bigoplus\limits_{j=1}^{n}f_j=\sum\limits_{j=1}^{n}f\cdot P_j\Big)\Longleftrightarrow\Big([\underline{f}(h);\overline{f}(h)]\subset\Big[\sum\limits_{j=1}^{n}\underline{f_j}(h_j);\sum\limits_{j=1}^{n}\overline{f}_j(h_j)\Big]\Big)$
$(\forall\ h=h_1+...+h_n\in E)$.

Перейдем к разложению в K–набор сублинейного K–оператора конечного ранга.

Предложение 2.7. *Пусть E — нормированный конус, $A\in L_K(E;\mathbb{R}^m)$, $Q_i:\mathbb{R}_{(i)}\to\mathbb{R}^m$ — канонические инъекции. Положим*

$$f_ih=[\underline{f_i}(h);\overline{f}_i(h)]=Q_i(Ah),\quad f_i\in(E)^*_K\quad(i=\overline{1,m}).$$

Введем "K–набор" K–функционалов $f_i:E\to\mathbb{R}_K$:

$$(f^1,...,f^m)_K\cdot h=\prod_{i=1}^{m}[\underline{f_i}(h);\overline{f}_i(h)]\in\mathbb{R}^m.$$

Тогда справедлива оценка:

$$\Big(A\preceq(f^1,...,f^m)_K\Big)\Longleftrightarrow\Big(Ah\subset\prod_{i=1}^{m}[\underline{f_i}(h);\overline{f}_i(h)]\Big)\quad(\forall h\in E).$$

При этом прямоугольная оценка точна по проекциям: $P^i(Ah)=[\underline{f_i}(h);\overline{f}_i(h)]$.

Наконец, опишем общее разложение K–оператора конечного ранга в K–матрицу.

Теорема 2.13. *Пусть E_j $(j=\overline{1,n})$ — нормированные конусы, $A\in L_K\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}E_j;\mathbb{R}^m\Big)$. Положим*

$$f_{ij}(h_j)=[\underline{f_{ij}}(h_j);\overline{f}_{ij}(h_j)]=Q_i(AP_jh)\quad(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

Тогда справедлива оценка $(\forall\ h=h_1+...+h_n\in E)$:

$$\begin{gathered}\Big(A\preceq([\underline{f_{ij}};\overline{f}_{ij}])_K=\Big(\Big[\sum_{j=1}^{n}\underline{f_{ij}};\sum_{j=1}^{n}\overline{f}_{ij}\Big]\Big)_K^{i=\overline{1,m}}\Big)\Longleftrightarrow\\ \Longleftrightarrow\Big(Ah\subset\Big(\prod_{i=1}^{m}\Big[\sum_{j=1}^{n}\underline{f_{ij}}(h_j);\sum_{j=1}^{n}\overline{f}_{ij}(h_j)\Big]\Big).\end{gathered}\tag{2.6}$$

Замечание 2.17. Приведем полезную для приложений *параметрическую модель K–матрицы* (в случае K–операторов конечного ранга).

Вводим "нижнюю" и "верхнюю" матрицы K–оператора A:

$$\underline{A} = (\underline{f_{ij}})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}, \quad \overline{A} = (\overline{f}_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Тогда оценка (2.6) позволяет интерпретировать K–матрицу $[\underline{f_{ij}}; \overline{f}_{ij}]$ как набор матриц

$$\Big((1-t_i)\underline{f_{ij}} + t_i \cdot \overline{f}_{ij}\Big)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} \quad (0 \le t_i \le 1).$$

Будем записывать это множество как *m–мерный матричный прямоугольник* $[\underline{A}; \overline{A}]$, стягивающий (вдоль главной диагонали) матрицы $\underline{A}$ и $\overline{A}$. Вершинами этого прямоугольника служат 2^m матриц, часть строк которых берется из $\underline{A}$, а другая часть строк — из $\overline{A}$.

Перейдем к *бисублинейным K–функционалам.* Здесь справедлив аналог теоремы 2.10.

Теорема 2.14. *Пусть E_1, E_2 – выпуклые конусы, $\varphi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}_K$. Тогда φ — бисублинейный K–функционал в том и только в том случае, если*

$$\varphi(h_1, h_2) = [\underline{\varphi}(h_1, h_2); \overline{\varphi}(h_1, h_2)],$$

где $\underline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — бинадлинейный функционал, $\overline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — бисублинейный функционал, $\underline{\varphi}(h_1, h_2) \le \overline{\varphi}(h_1, h_2)$.

При этом, если E_1, E_2 — нормированные конусы, то K–функционал $\varphi = [\underline{\varphi}; \overline{\varphi}]$ ограничен в том и только в том случае, когда $\underline{\varphi}$ полунепрерывен снизу, $\overline{\varphi}$ полунепрерывен сверху на $E_1 \times E_2$.

Рассматривая, по аналогии сублинейным случаем, бисублинейный K–функционал

$$B \in L_K(E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_n, E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_n; \mathbb{R}),$$

мы приходим к порожденной им квадратной бисублинейной K–матрице

$$M_B = (\varphi_{ij} = [\underline{\varphi_{ij}}; \overline{\varphi_{ij}}])_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Аналогом оценки (2.6) здесь служит следующая квадратичная оценка.

Теорема 2.15. *В рассмотренных условиях справедлива оценка:*

$$B(h)^2 \subset M_B \cdot (h)^2 \subset \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [\underline{\varphi_{ji}}(h_i, h_j); \overline{\varphi_{ji}}(h_i, h_j)].$$

Отметим в заключение, что замечание 2.17 естественным образом распространяется и на бисублинейные K–матрицы.

2.1.4 Симметризация сублинейных функционалов и K–функционалов.

Как уже отмечалось в примере 2.1, естественное вложение $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$ $(x \mapsto \{x\})$ инъективно, сохраняет операции, но не сохраняет порядок: $(x_1 < x_2$ в $\mathbb{R}) \not\Rightarrow (\{x_1\} \preceq \{x_2\}$ в $\mathbb{R}_K)$; более того, $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$ несравнимы. Вследствие несогласованности исходного порядка в $\mathbb{R}$ и порядка по вложению в $\mathbb{R}_K$, возникает "дисбаланс" между сублинейными функционалами $f : E \to \mathbb{R}$ и однозначными сублинейными функционалами $f : E \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$:

(i) если K–функционал $f = [\underline{f}; \overline{f}] : E \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$ (т. е. $\underline{f} = \overline{f}$) сублинеен относительно вложения в $\mathbb{R}_K$, то f — *линейный функционал*;

(ii) если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен относительно обычного порядка в $\mathbb{R}$ (например, $f(x) = \|x\|$), то линейность f отсюда не следует.

Таким образом, если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то функционал $\{f\} : h \mapsto \{f(h)\}$, вообще говоря, не сублинеен. Наша цель — устранить этот "дисбаланс" с помощью простого преобразования *"симметризации"*. Вначале введем его для функционалов $f : E \to \mathbb{R}$. Далее E — нормированное пространство.

Определение 2.13. *Пусть функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен. Введем симметризованный K–функционал f^s равенством:*

$$f^s(h) = [-f(-h); f(h)] =: [\underline{f}^s(h); \overline{f}^s(h)]. \tag{2.7}$$

Предложение 2.8. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то определение (2.7) корректно и K–функционал $f^s : E \to \mathbb{R}_K$ также сублинеен. При этом $f^s(-h) = -f^s(h)$.*

Теперь распространим определение симметризации на сублинейные K–функционалы.

Определение 2.14. *Пусть K–функционал $f : E \to \mathbb{R}_K$ сублинеен. Введем симметризованный K–функционал f^s равенством:*

$$f^s(h) = [\min(\underline{f}(h), -\overline{f}(-h)); \max(\overline{f}(h); -\underline{f}(-h))]. \tag{2.8}$$

Предложение 2.9. *Если $f : E \to \mathbb{R}_K$ сублинеен, то определение (2.8) корректно и K–функционал $f^s : E \to \mathbb{R}_K$ также сублинеен. При этом $f^s(-h) = -f^s(h)$.*

Замечание 2.18. 1) Из сублинейности f в обоих рассмотренных случаях непосредственно следует неравенство $\underline{f^s} \leq \overline{f^s}(h)$.
2) Нечетность f^s влечет его однородность $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} : \; f^s(\lambda h) = \lambda \cdot f^s(h)$. Однако отсюда не следует линейность функционала f^s, ввиду его многозначности.
3) Повторная симметризация не меняет вид f^s: $f^{ss} = f^s$.

Наконец отметим, что в случае $f : E \to \mathbb{R}$ симметризации f и $\{f\}$ совпадают, что решает поставленную в начале пункта задачу.

Предложение 2.10. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то $\{f\}^s = f^s$. Таким образом, в этом случае формулы (2.7) (для f) и (2.8) (для $\{f\}$) дают один и тот же результат. В частности, если f линеен, то $f^s = \{f\}$.*

Замечание 2.19. Отметим в заключение, что процедуру симметризации можно применить также и к сублинейным операторам $A : E \to F$, $B : E \to F_K$, если конус F *решеточно* упорядочен. Заметим также, что записанные в этом разделе свойства K–функционалов распространяются на случай симметризованных функционалов.

2.2 Компактные субдифференциалы. Исчисление первого порядка.

2.2.1 K–пределы и их основные свойства.

Понятие K–предела, введенное ранее, мы изложим здесь уже в категории нормированных конусов.

Определение 2.15. *Пусть E — нормированный конус, $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым компактным пересечением B. Множество B назовем K–пределом системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:*

$$B = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta,$$

если $\forall\, U(0) \subset E \;\exists\, \delta_U > 0 \; (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B_\delta \subset B + U)$.

Таким образом, «K–сходимость» множеств B_δ, в рамках определения 2.15 можно охарактеризовать как равномерное внешнее топологическое стягивание множеств B_δ к их компактному пересечению.

Перейдем к простейшим свойствам K–пределов. Следующие два свойства легко следуют из определения и не используют в доказательстве компактность K–предела.

Предложение 2.11. *Пусть, в условиях определения 2.15, существует $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta$. Если $B^2_\delta \subset B^1_\delta$ $(\forall\, \delta > 0)$, то существует и $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta$, причем выполнено включение:*

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta \subset \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta.$$

Предложение 2.12. *Если существует* $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} B_\delta$, *то при любом* $\lambda \geq 0$ *существует и* $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0}(\lambda\cdot B_\delta)$, *причем выполнено равенство:*

$$K\text{-}\lim_{\delta\to+0}(\lambda\cdot B_\delta) = \lambda\cdot K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B_\delta.$$

Доказательство свойства *обобщенной аддитивности* уже требует компактности хотя бы одного из двух K–пределов.

Предложение 2.13. *Если существуют* K*–пределы* $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} B^1_\delta$ *и* $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} B^2_\delta$, *то существует и* K*–предел их замкнутой суммы (по Минковскому)* $\{\overline{B^1_\delta + B^2_\delta}\}_{\delta>0}$, *причем выполнено равенство:*

$$K\text{-}\lim_{\delta\to+0}\overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^1_\delta + K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^2_\delta.$$

Предложение 2.14. *Пусть* $B^1_\delta \subset E_1$, $B^2_\delta \subset E_2$ $(\forall\delta > 0)$, *где* E_1, E_2 *– нормированные конусы. Если существуют* K*–пределы* $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} B^1_\delta$ *и* $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} B^2_\delta$, *то существует и* K*–предел их декартова произведения* $\{B^1_\delta\times B^2_\delta\}_{\delta>0}$ *в* $E_1\times E_2$, *причем имеет место равенство:*

$$K\text{-}\lim_{\delta\to+0}(B^1_\delta\times B^2_\delta) = (K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^1_\delta)\times(K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^2_\delta). \tag{2.9}$$

Наконец, справедлив следующий важный критерий «K–сходимости» , который мы, по аналогии с известным признаком Вейерштрасса, назовем *признаком Вейерштрасса для* K*–пределов.*

Теорема 2.16. *В условиях и обозначениях определения 2.15,* K*–предел* $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} B_\delta$ *существует тогда и только тогда, когда найдется такой выпуклый компакт* $\widetilde{B}\subset E$, *что*

$$\forall\, U(0)\subset E \quad \exists\delta_U > 0: \quad (0<\delta<\delta_U) \Rightarrow (B_\delta\subset\widetilde{B} + U(0)). \tag{2.10}$$

При этом $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} B_\delta \subset \widetilde{B}$.

Замечание 2.20. 1) Условие (2.10) можно, видимо, трактовать как условие «полунепрерывности сверху» отображения $\delta\mapsto B_\delta$ в конусе E_B выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств E.

2) Теорема 2.16 служит далее базой для получения критериев K–субдифференцируемости.

2.2.2 K–субдифференциалы по направлению.

Определяя K–субдифференциалы в нормированных конусах, мы стараемся придерживаться классической схемы Гато–Адамара–Фреше: дифференциал по направлению — слабый дифференциал — дифференциал Гато — дифференциал Фреше. Замена основных объектов следующая: пространства $\mapsto$ конусы, линейные операторы $\mapsto$ сублинейные операторы, дифференциалы $\mapsto$ K–субдифференциалы.

Всюду далее $E,\ F$ — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $h \in E$ — произвольное направление в E, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F.

Определение 2.16. *Назовем K–субдифференциалом отображения f в точке x следующий K–предел (если он существует):*

$$\partial_{sub} f(x,h) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overbrace{\overline{co}\,\{Y \in F \,|\, f(x+t\cdot h) = f(x) + t\cdot Y,\, 0<t<\delta\}}^{\partial_\delta f(x,h)}. \tag{2.11}$$

В случае, когда F — нормированное пространство, выражение под знаком K–предела в (2.11) можно выразить в более привычной форме, через разностные отношения:

$$\partial_{sub} f(x,h) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \right| \left. 0<t<\delta \right\}$$

Заметим, что если конус F не погружается в векторное пространство, то в (2.11), при каждом фиксированном $t>0$, Y определяется, вообще говоря, *не единственным образом.*

Приведем некоторые *элементарные свойства* K–субдифференциалов по направлению.

Предложение 2.15. *Справедливы соотношения:*

(i) $\partial_{sub}(\lambda f)(x,h) = \lambda\cdot\partial_{sub} f(x,h)$ $(\forall\lambda\geq 0)$;

(ii) $\partial_{sub}(f_1+f_2)(x,h) \subset \partial_{sub} f_1(x,h) + \partial_{sub} f_2(x,h)$.

В случае, если F — нормированное пространство, свойство однородности по f выполнено в полном объеме:

(iii) $\partial_{sub}(\lambda f)(x,h) = \lambda\cdot\partial_{sub} f(x,h) \quad (\forall\lambda\in\mathbb{R})$.

Предложение 2.16. *Справедливо соотношение:*

(i) $\partial_{sub}(f)(x, \lambda h) = \lambda \cdot \partial_{sub} f(x, h) \quad (\forall \lambda \geq 0)$;

В случае, если F — нормированное пространство, свойство однородности по h выполнено в полном объеме:

(ii) $\partial_{sub} f(x, \lambda h) = \lambda \cdot \partial_{sub} f(x, h) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$.

Предложение 2.17. *Если $f = (f_1, f_2) : E \to F_1 \times F_2$, то справедливы равенства:*

$$pr_{F_i}(\partial_{sub} f(x, h)) = \partial_{sub} f_i(x, h) \quad (i = 1, 2).$$

В частности,

$$\partial_{sub}(f_1, f_2)(x, h) \subset \partial_{sub} f_1(x, h) \times \partial_{sub} f_2(x, h).$$

Выделим важный случай K–субдифференцирования функционала $f : E \to \mathbb{R}$. Здесь можно дать простую формулу для вычисления $\partial_{sub} f(x, h)$.

Теорема 2.17. *Функционал $f : E \to \mathbb{R}$ K–субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f по направлению h в этой точке: $\overline{\partial} f(x, h)$ и $\underline{\partial} f(x, h)$. При этом имеет место равенство:*

$$\partial_{sub} f(x, h) = \Big[\underline{\partial} f(x, h);\ \overline{\partial} f(x, h)\Big]. \tag{2.12}$$

Замечание 2.21. Формулы для вычисления $\underline{\partial} f(x, h)$ и $\overline{\partial} f(x, h)$ имеют обычный вид, коническая структура E его не усложняет:

$$\underline{\partial} f(x, h) = \varliminf_{t \to +0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}; \qquad \overline{\partial} f(x, h) = \varlimsup_{t \to +0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Как следствие, отметим уже приведенный результат.

Следствие 2.1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ K–субдифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существуют и конечны нижняя и верхняя частные производные в этой точке: $\underline{\dfrac{df}{dx}}(x)$ и $\overline{\dfrac{df}{dx}}(x)$. При этом имеет место равенство:*

$$\partial_{sub} f(x) = \left[\underline{\frac{df}{dx}}(x); \overline{\frac{df}{dx}}(x)\right].$$

Следствие 2.2. *Отображение $f = (f_1, ..., f_m) : E \to \mathbb{R}^m$ K–субдифференцируемо в точке $x \in \mathbb{R}$ по направлению h тогда и только тогда, когда все координатные функционалы f_i K–субдифференцируемы в этой точке по направлению h. При этом выполнена оценка:*

$$\partial_{sub}(f_1, ..., f_m)(x, h) \subset \prod_{j=1}^{m} \Big[\underline{\partial} f_j(x, h);\ \overline{\partial} f_j(x, h)\Big]. \tag{2.13}$$

При этом прямоугольная оценка (2.13) точна по проекциям.

2.2.3 Слабый K–субдифференциал, K–субдифференциал Гато, K–субдифференциал Фреше.

Отправляясь от K–субдифференциала по фиксированному направлению h и действуя по аналогии с классической схемой, мы теперь вводим слабый K–субдифференциал как сублинейный K–оператор по h, K–субдифференциал Гато — как ограниченный сублинейный K–оператор, и наконец, K–субдифференциал Фреше по схеме "Гато" плюс "равномерная по направлениям сходимость в K–пределе $\partial_{sub} f(x,h)$".

Далее, как и в п.2.2.2, E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 2.17. *Будем говорить, что отображение f слабо K–субдифференцируемо в точке x, если f K–субдифференцируемо в этой точке по любому направлению $h \in E$, и K–субдифференциал по направлению $\partial_{sub} f(x,h)$ сублинеен по h. Примем в этом случае обозначение $\partial_{sub} f(x)h = \partial_{sub} f(x,h)$. Здесь $\partial_{sub} f(x) : E \to F_K$ — сублинейный K–оператор.*

Определение 2.18. *Будем говорить, что отображение f K–субдифференцируемо по Гато в точке x, если f слабо K–субдифференцируемо в этой точке и слабый K–субдифференциал $\partial_{sub} f(x)$ ограничен (или, что равносильно, равномерно полунепрерывен сверху на E). В этом случае сублинейный ограниченный оператор $\partial_{sub} f(x)$ назовем K–субдифференциалом Гато отображения f в точке x.*

Определение 2.19. *Будем говорить, что отображение f K–субдифференцируемо по Фреше (или сильно K–субдифференцируемо) в точке x, если f K–субдифференцируемо по Гато в этой точке, и сходимость в K–пределе*

$$\partial_{sub} f(x)h = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\{Y \in F | f(x+h) = f(x) + t \cdot Y,\ 0 < t < \delta\} \tag{2.14}$$

равномерна по всем направлениям h, $0 < \|h\| \leq 1$. В этом случае K–оператор $\partial_{sub} f(x)$ назовем K–субдифференциалом Фреше(или сильным K–субдифференциалом) отображения f в точке x.

В случае нормированного пространства F равенство (2.14) принимает вид:

$$\partial_{sub} f(x)h = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t}\ ;\ 0 < t < \delta \right\}.$$

Приведем теперь критерии для всех типов K–субдифференцируемости в терминах малости остаточного члена (доказательство опирается на признак

Вейерштрасса для K–пределов). С этой целью введем понятие *многозначного малого отображения.*

Определение 2.20. *Обозначим через* F_B *нормированный выпуклый конус всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств* F *с суммой* $\overline{(B_1 + B_2)}$ *и с нормой* $\|B\| = \sup\limits_{y \in B} \|y\|$.

Отображение $\Psi : \mathbb{R} \supset U(0) \to F_B$ *назовем малым (в нуле), если* $\|\Psi(t)\| \to 0$ *при* $t \to 0$. *Примем обычную запись:* $\Psi(t) \to 0$ *при* $t \to 0$.

Теорема 2.18. *Отображение* f *слабо* K*–субдифференцируемо в точке* x *в том и только в том случае, если найдутся сублинейный* K*–оператор* $B : E \to F_K$ *и отображение* $\psi : E \to F_B$*, такие, что:*

$$f(x+h) \in f(x) + Bh + \psi(h) \ , \quad \text{где } \ \frac{\psi(th)}{t} \to 0 \text{ при } \ t \to +0 \quad (\forall h \in E). \quad (2.15)$$

При этом $\partial_{sub} f(x)h \subset Bh$ $(\forall h \in E)$.

В случае нормированного пространства F *представление (2.15) можно переписать в виде:*

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} \in Bh + \lambda(t,h) \ , \quad \text{где } \ \lambda(t,h) \to 0 \text{ при } \ t \to +0 \quad (\forall h \in E).$$

Теорема 2.19. *Отображение* f K*–субдифференцируемо по Гато в точке* x *в том и только в том случае, если выполнена оценка (2.15), где* $B \in L_K(E; F)$.

Теорема 2.20. *Отображение* f K*–субдифференцируемо по Фреше в том и только в том случае, если выполнена оценка (2.15), где* $B \in L_K(E; F)$ *и*

$$\frac{\psi(th)}{t} \rightrightarrows 0 \ \text{ при } t \to +0 \ (\text{равномерно по } \ \|h\| \le 1); \quad (2.16)$$

или, что равносильно,

$$\|\psi(h)\| = o(\|h\|).$$

Отметим некоторые *свойства сильных* K*–субдифференциалов*, непосредственно вытекающие из определения и критерия 2.20. Прежде всего, это очевидная связь между K–субдифференцируемостью и непрерывностью.

Теорема 2.21. *Если отображение* f *сильно* K*–субдифференцируемо в точке* x*, то* f *непрерывно в этой точке.*

Далее, в случае *нормированных пространств*, очевидно, $\partial_{sub} f(x)$ — обобщение производной Фреше. Менее очевидно, что существует и обратная связь.

Теорема 2.22. *Пусть E, F — нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Тогда:*
(i) Если f сильно дифференцируемо в точке x, то f также и сильно K–суб-дифференцируемо в точке x, причем $\partial_{sub} f(x) = f'(x)$.
(ii) Обратно, если f дифференцируемо по каждому направлению в точке x, причем (обозначая $\partial f(x, h) = \lim\limits_{t \to +0} (f(x + th) - f(x)/t)$):

$$\partial f(x, -h) = -\partial f(x, h),$$

и f сильно K–субдифференцируемо в точке x, то f сильно дифференцируемо (в обычном смысле) в этой точке.

Простой пример $\partial_{sub} f \neq f'$ дает функция $f(x) = |x|$. Имеем
$\partial_{sub} f(x) = f'(x) = signx$ при $x \neq 0$, $\partial_{sub} f(0) = [-1; 1]$.

Здесь мы также выделим важный *случай K–субдифференцирования функционалов.*

Замечание 2.22. В случае сильного K–субдифференцирования функционалов $f : E \to \mathbb{R}$, а также (покоординатно) отображений $f : E \to \mathbb{R}^m$ нам удобнее будет использовать *симметризованный K–субдифференциал* $\partial^s_{sub} f(x)h$. Используя равенства (2.12) и (2.7) получаем:

$$\partial^s_{sub} f(x)h = [\min(\underline{\partial} f(x, h), -\overline{\partial} f(x, -h)); \max(\overline{\partial} f(x, h), -\underline{\partial} f(x, -h))]. \tag{2.17}$$

Смысл симметризации легко уяснить, переходя к языку нижних и верхних частных производных. Фиксируя нормированное направление h, равенство (2.12) можно переписать в виде:

$$\partial_{sub} f(x)h = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x + 0); \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x + 0)\right] \tag{2.18}$$

(где справа выписаны нижняя и верхняя правосторонние частные производные f в точке x по прямой $\{\lambda h \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ с положительным направлением h). Тогда

$$\partial_{sub} f(x)(-h) = \left[-\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x - 0); -\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x - 0)\right] \tag{2.19}$$

(где справа выписаны уже левосторонние нижняя и верхняя производные f в точке x).

Отсюда, подставляя (2.18) и (2.19) в (2.17), получаем:

$$\partial^s_{sub} f(x)h = \left[\min\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x + 0); \frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x - 0)\right); \max\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x + 0); \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x - 0)\right)\right] = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x); \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\right] \tag{2.20}$$

Теорема 2.23. *Пусть E — нормированный конус. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сильно K–субдифференцируем в точке x, то $\forall\, h \in E$ справедливо равенство:*

$$\partial_{sub} f(x)h = \left[\underline{\partial} f(x)h; \overline{\partial} f(x)h\right], \tag{2.21}$$

где $\underline{\partial} f(x)$ — надлинейный, полунепрерывный снизу по h функционал, $\overline{\partial} f(x)$ — сублинейный, полунепрерывный сверху по h функционал.

В частности, если E — нормированное пространство и $\|h\| = 1$, то

$$\partial_{sub} f(x)h = \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x); \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\right]. \tag{2.22}$$

2.2.4 Общие свойства сильных K–субдифференциалов.

Мы начнем с необходимого условия K–субдифференцируемости.

Теорема 2.24. *Пусть $E_1, ..., E_n$, F — нормированные конусы. Если отображение $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ K–субдифференцируемо в точке $x = (x_1, ..., x_n)$ по совокупности переменных, то f K–субдифференцируемо в этой точке по каждой из переменных в отдельности. При этом справедлива оценка:*

$$\partial_{sub} f(x_1, ..., x_n)(h_1, ..., h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{sub} (x_1, ..., x_n) h_i.$$

Следствие 2.3. *Пусть $E_1, ..., E_n$ — нормированные пространства. Если функционал $f : E_1 \times ... \times E_n \to \mathbb{R}$ сильно K–субдифференцируем в точке x, то имеет место "формула полного K–субдифференциала" ($\forall\, h = (h_1, ..., h_n) \in E_1 \times ... \times E_n$) в оценочной форме:*

$$\partial_{sub} f(x)(h_1, ...h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial h_i}\right)^{s}_{sub} (x) h_i = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial f}{\partial h_i}}(x); \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial f}{\partial h_i}}(x)\right], \tag{2.23}$$

где через $(\partial f / \partial h_i)^s_{sub}$ обозначены симметризованные частные K–субдифференциалы по переменным $h_i \in E_i$.

В частности, если функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сильно K–субдифференцируем в точке x, то в этой точке существуют и конечны нижние и верхние частные производные f по всем переменным, причем выполнена оценка:

$$\partial_{sub} f(x)(h_1, ...h_n) \subset \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x) h_i; \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x) h_i\right] = \left[\underline{\nabla} f(x); \overline{\nabla} f(x)\right] \cdot h\,,$$

где $\underline{\nabla} f(x) = \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\right)_{i=\overline{1,n}}$, $\overline{\nabla} f(x) = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\right)_{i=\overline{1,n}}$.

Теперь рассмотрим вопрос о покоординатной K–субдифференцируемости отображения $f : E \to F_1 \times ... \times F_m$, где $E,\ F_1, ...,\ F_m$ — нормированные конусы.

Теорема 2.25. *Отображение f K–субдифференцируемо в точке $x \in E$ тогда и только тогда, когда все координатные отображения $f_j,\ j = \overline{1,m}$, K–субдифференцируемы в точке x. При этом справедлива оценка*

$$\partial_{sub} f(x)h \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\partial_{sub} f_j(x)h\right). \tag{2.24}$$

В частности, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, то последняя оценка принимает вид:

$$\partial_{sub} f(x)h \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\left[\underline{\frac{df_j}{dx}}(x); \overline{\frac{df_j}{dx}}(x) \right] \cdot h \right). \tag{2.25}$$

При этом прямоугольные оценки (2.24) и (2.25) точны по проекциям.

Перейдем к вопросу о *K–матрице Якоби* для отображений $f : \prod\limits_{i=1}^{n} E_i \to \prod\limits_{j=1}^{m} F_j$, где E_i $(i = \overline{1,n})$, F_j $(j = \overline{1,m})$ — нормированные конусы. Используя предыдущие результаты, нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 2.26. *Если отображение f K–субдифференцируемо в точке $x = (x_1, ...x_n)$, то*

$$\partial_{sub} f(x_1, ...x_n)(h_1, ..., h_n) \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{sub} (x_1, ..., x_n) h_i \right). \tag{2.26}$$

Определение 2.21. *K–матрицу сублинейных K–операторов*

$$J_K f(x) = \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{sub} (x) \right)_K^{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}} \quad \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{sub} (x) \in L_K(E_i; F_j) \right)$$

назовем K–матрицей Якоби отображения f в точке x.

Выделим случай *евклидовых пространств*, где оценка (2.26) существенно уточняется.

Теорема 2.27. *Пусть $E_1, ..., E_n$ — нормированные пространства. Если отображение $f : E_1 \times ... \times E_n \to \mathbb{R}^m$ сильно K–субдифференцируемо в точке x, то $\forall\, h = (h_1, ..., h_n)$ справедлива оценка:*

$$\partial^s_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n) \subset \prod_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial f_j}{\partial h_i}}(x); \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial f_j}{\partial h_i}}(x) \right].$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ получаем:

$$\partial^s_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n) \subset \prod_{j=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x) h_i ; \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x) h_i \Big] = \prod_{j=1}^{m} \Big([\underline{\nabla} f_j(x); \overline{\nabla} f_j(x)],\, h \Big) =$$

$$= [\underline{J}_f(x); \overline{J}_f(x)] \cdot h,$$

где $\underline{J}_f(x) = \Big(\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x) \Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, $\overline{J}_f(x) = \Big(\overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x) \Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ *— , соответственно, нижняя и верхняя матрицы Якоби f в точке x, $[\underline{J}_f(x); \overline{J}_f(x)]$ — m–мерный отрезок, стягивающий эти матрицы (см. замечание 2.14).*

Перейдем к вопросу о K–субдифференцировании композиции.

Теорема 2.28. *Если отображение $f : E \to F$ K–субдифференцируемо в точке $x \in E$, отображение $g : F \to G$ K–субдифференцируемо в точке $y = f(x) \in F$, то композиция $g \circ f : E \to G$ также K–субдифференцируема в точке $x \in E$. При этом*

$$\partial_{sub}(g \circ f)(x) h \subset [\partial_{sub} g(y) \cdot \partial_{sub} f(x)] h. \tag{2.27}$$

Для приложений важен вопрос о *K–матрице Якоби композиции.*

Рассмотрим случай

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i \xrightarrow{f=(f_1,..,f_m)} F = \prod_{j=1}^{m} F_j \xrightarrow{g=(g_1,...,g_l)} \prod_{k=1}^{l} G_k = G.$$

Напомним, что в определении 2.12 была введена *K–композиция* $[B \cdot A]$ K–операторов. Это позволяет ввести соответствующее произведение K–матриц:

$$(A_{ij})_K \times (B_{jk})_K = \Big(\sum_j [A_{ij} \cdot B_{jk}] \Big)_K .$$

Теорема 2.29. *Если отображение f K–субдифференцируемо в точке $x \in E$, а отображение g K–субдифференцируемо в точке $y = f(x) \in F$, то справедлива оценка (в обозначениях определения 2.12):*

$$\begin{aligned} &\partial_{sub}(g \circ f)(x) \preceq J_K(g \circ f)(x) \preceq J_K g(y) \times J_K f(x) = \\ &= \Bigg(\sum_{j=1}^{m} \Bigg[\Big(\frac{\partial g_k}{\partial y_j} \Big)_{sub} (y) \cdot \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big)_{sub} (x) \Bigg] \Bigg)_K^{k=\overline{1,l},\; i=\overline{1,n}}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

или

$$\partial_{sub}(g \circ f)(x) \preceq J_K(g \circ f)(x) \subset \prod_{k=1}^{l} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Bigg[\Big(\frac{\partial g_k}{\partial y_j} \Big)_{sub} (y) \cdot \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big)_{sub} (x) \Bigg] h_i \Bigg)$$

$$(h = (h_1, ..., h_n) \in E)\,.$$

В частности, если, в условиях теоремы, $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $G = \mathbb{R}^l$, *то*

$$\partial^s_{sub}(g \circ f)(x) \subset (J_K g(y) \times J_K f(x))h =$$
$$= \prod_{k=1}^{l}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\underline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y);\overline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y)\right]\cdot\left[\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x);\overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)\right]\cdot h_i\Bigg). \tag{2.29}$$

В случае, если f дифференцируемо в обычном смысле, оценка (2.29) принимает вид

$$J^s_K(g \circ f)(x)h \subset \prod_{k=1}^{l}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\underline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)h_i;\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\overline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)h_i\right].$$

Рассмотрим теперь вопрос о K–субдифференцировании оператора композиции.

Теорема 2.30. *Пусть $B(u)(x) = f(u(x))$, где $B : C^1(I) \to C(I)$. Если f всюду K-субдифференцируема на I , то оператор композиции $B(u)(x)$ также всюду K–субдифференцируем в $C^1(I)$, причем:*

$$\big(\partial_{sub}B(u)h\big)(x) \subset \big(\partial_{sub}f(u(x))h\big)h(x) = [\underline{\partial}f(u(x));\overline{\partial}f(u(x))]h(x).$$

Отметим, наконец, случай *композиции с билинейным оператором* (аналог "производной произведения").

Теорема 2.31. *Пусть E — нормированный конус, F_1, F_2, G — нормированные пространства. Если отображение $f = (f_1, f_2) : E \to F_1 \times F_2$ K–субдифференцируемо в точке $x \in E$, и $B : F_1 \times F_2 \to G$ — билинейный непрерывный оператор, то отображение $B(f_1, f_2) : E \to G$ также K–субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial_{sub}B(f_1, f_2)(x)h \subset B(f_1(x), \partial_{sub}f_2(x)h) + B(\partial_{sub}f_1(x)h, f_2(x)).$$

2.2.5 Теорема о среднем для K–субдифференцируемых отображений.

Напомним классическую схему вывода теоремы о среднем в банаховых пространствах. 1) Формула конечных приращений для непрерывных отображений $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$: для возрастающей непрерывной на $[a;b]$ и дифференцируемой на $(a;b)$ функции $g(x)$ и замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ справедлива импликация:

$$(f'(x) \in g'(x) \cdot B,\ a < x < b) \Rightarrow (f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B).$$

2) Общая форма теоремы о среднем для непрерывных на отрезке и дифференцируемых внутри него отображений $f : E \supset U([a;b]) \to F$:

$$f(b) - f(a) \in \overline{co}\{f'(x)|a < x < b\} \cdot (b - a).$$

3) Простейшая форма теоремы о среднем (в той же ситуации):

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x\in(a;b)} \|f'(x)\| \cdot \|b - a\|.$$

При переходе к нормированным конусам, придерживаясь в целом изложенной выше схемы, мы вынуждены оценку $f(b)-f(a) \in [g(b)-g(a)]\cdot B$ заменять оценкой: $f(b) \in f(a) + [g(b) - g(a)] \cdot B$.

Теорема 2.32. *Пусть F — нормированный конус, отображения $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ и $g : \mathbb{R} \supset [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a;b]$ и K–субдифференцируемы на $(a;b)$, причем g возрастает. Если для некоторого замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ выполнена локальная оценка $\partial_{sub}f(x) \in \partial_{sub}g(x) \cdot B \quad (a < x < b)$, то справедлива глобальная оценка:*

$$f(b) \in f(a) + [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{2.30}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (2.30) можно записать в виде:

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B.$$

Перейдем к теореме о среднем для отображений вещественного аргумента.

Теорема 2.33. *Пусть F — нормированный конус, отображение $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ непрерывно на $[a;b]$ и K–субдифференцируемо на $(a;b)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(b) \in f(a) + \overline{co}\Big(\bigcup_{a<x<b} \partial_{sub}f(x)\Big) \cdot (b - a). \tag{2.31}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (2.31) можно записать в виде:

$$f(b) - f(a) \in \overline{co}\Big(\bigcup_{a<x<b} \partial_{sub}f(x)\Big) \cdot (b - a).$$

Из последнего результата легко следует общая форма теоремы о среднем в нормированных конусах. Здесь удобнее перейти к локальным обозначениям.

Теорема 2.34. *Пусть E и F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U([x; x + h]) \to F$ непрерывно на $[a; b]$ и K–субдифференцируемо на $(a; b)$. Тогда справедлива оценка:*

$$f(x+h) \in f(x) + \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} (\partial_{sub} f(x+\theta h)\cdot h)\Big). \qquad (2.32)$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (2.32) можно записать в виде:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} (\partial_{sub} f(x+\theta h)\cdot h)\Big).$$

Наконец, предъявим теорему о среднем с оценкой по норме.

Теорема 2.35. *В условиях теоремы 2.34 справедливы представление и оценка:*

$$f(x+h) = f(x) + y, \text{ где } \|y\| \le \sup_{0<\theta<1} \|\partial_{sub} f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|. \qquad (2.33)$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (2.33) можно записать в виде:

$$\|f(x+h) - f(x)\| \le \sup_{0<\theta<1} \|\partial_{sub} f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|.$$

Выделим теперь важный случай функционалов.

Теорема 2.36. *Пусть E — нормированный конус, отображение $f : E \supset U([x; x + h]) \to \mathbb{R}$ непрерывно на $[x; x + h]$ и K–субдифференцируемо на $(x; x + h)$. Тогда справедлива оценка:*

$$|f(x+h) - f(x)| \le \sup_{0<\theta<1} \left(\max\left(\left|\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+\theta h)\right|, \left|\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+\theta h)\right|\right)\right) \cdot \|h\|. \qquad (2.34)$$

Если, в частности, $E = \mathbb{R}^n$, то оценка (2.34) принимает вид:

$$|f(x+h) - f(x)| \le \sup_{0<\theta<1} (\max(\|\underline{\nabla} f(x+\theta h)\|, \|\overline{\nabla} f(x+\theta h)\|)) \cdot \|h\|. \qquad (2.35)$$

Из (2.35) вытекает оценка аналогичного типа для отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Следствие 2.4. *Пусть отображение $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \supset U([x; x + h]) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на $[x; x+h]$ и K–субдифференцируемо в $(x; x+h)$. Тогда справедлива оценка:*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \le \sup_{0<\theta<1} \sum_{j=1}^{m} \max\Big(\|\underline{\nabla} f_j(x+\theta h)\|, \|\overline{\nabla} f_j(x+\theta h)\|\Big) \cdot \|h\|.$$

2.2.6 K–субдифференцируемость и субгладкость.

Напомним определение полунепрерывности сверху (см п. 2.1.2).

Определение 2.22. *Пусть E, F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен, $\Lambda : E \supset U(x) \to F$. Будем говорить, что отображение Λ полунепрерывно сверху (или субнепрерывно) в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \preceq \Lambda(x) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon). \tag{2.36}$$

Основным для нас является то обстоятельство, что в случае субдифференциалов (т.е. при $\Lambda = \partial_{sub}F : E \to L_K(E;F)$) в условии (2.36) можно заменить $\Lambda(x) = \partial_{sub}f(x)$ на произвольный элемент нормированного конуса $L_K(E;F)$. Это и есть *общая форма достаточного условия K–субдифференцируемости.*

Теорема 2.37. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно в точке x и K–субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot{U}(x)$ этой точки. Если, для некоторого K–оператора $\mathcal{D}_{f,x} \in L_K(E;F)$ выполнено условие:*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial_{sub}f(x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon), \tag{2.37}$$

то f K–субдифференцируемо в точке x, причем $\partial_{sub}f(x) \preceq \mathcal{D}_{f,x}$.

Замечание 2.23. Таким образом, в случае отображения $\Lambda = \partial_{sub}f$ условия (2.36) и (2.37) равносильны. Поэтому мы можем принять условие (2.37) за определение *полунепрерывности сверху*, или *субнепрерывности* отображения $\partial_{sub}f$ в точке x: $\partial_{sub}f \in C_{sub}(x)$. Будем писать также в этом случае: $f \in C^1_{sub}(x)$ и называть отображение f *субгладким* (точнее, C^1*–субгладким*) в точке x.

Перейдем к субгладкости частных K–субдифференциалов как достаточному условию K–субдифференцируемости.

Теорема 2.38. *Пусть $E_1, ..., E_n$, F — нормированные конусы, $f : E_1 \times ... \times E_n \supset$ $\supset U(x) \to F$. Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{sub} \in C_{sub}(x); \; i = \overline{1,n} \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f \; K\text{–субдифференцируемо в точке } x).$$

Рассмотрим теперь *случай функционалов* $f : E \to \mathbb{R}$, опираясь на результаты пунктов 2.2.2 — 2.2.4. Здесь мы выходим на узловые условия *полунепрерывности снизу* (по x) $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и *полунепрерывности сверху* (по x) $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$, которые в совокупности равносильны *субнепрерывности* $\partial_{sub} f = \left[\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}; \overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}\right] : E \to \mathbb{R}_K$.

Теорема 2.39. *Пусть E — нормированный конус, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial h}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x,\right.$$

$$\left.\overline{\frac{\partial f}{\partial h}} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f\ K\text{–субдифференцируем в точке } x).$$

В частности для функционалов многих переменных справедливо условие:

Теорема 2.40. *Пусть E_1, ..., E_n — нормированные конусы, $f : E_1 \times ... \times E_n \supset$ $\supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\underline{\nabla}_K f = \left(\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}\right)_{sub}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla}_K f = \left(\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}\right)_{sub}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f\ K\text{–субдифференцируем в точке } x).$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеем:

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\underline{\nabla} f = \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla} f = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f\ K\text{–субдифференцируем в точке } x).$$

Наконец, выразим условия субгладкости в терминах верхней и нижней K–матриц Якоби.

Теорема 2.41. *Пусть* $E_1, ..., E_n$; $F_1, ..., F_m$ *— нормированные конусы,* $f : E_1 \times ... \times E_n \supset U(x) \to F_1 \times ... \times F_m$. *Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \text{ матрица } \left(\underline{J}_K f = \left(\left(\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}} \right)_{sub} \right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \right.$$

$$\text{полунепрерывна снизу (поэлементно) в точке } x$$

$$\text{матрица } \overline{J}_K f = \left(\left(\overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}} \right)_{sub} \right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \text{ полунепрерывна сверху в точке } \left. x \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f \ K\text{–субдифференцируемо в точке } x).$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *имеем:*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\text{ матрица } \underline{J} f = \left(\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}} \right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \text{ полунепрерывна снизу в} \right.$$

$$\text{точке } x, \text{ матрица } \overline{J} f = \left(\overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}} \right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \text{ полунепрерывна сверху в точке } \left. x \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f \ K\text{–субдифференцируемо в точке } x).$$

Дадим некоторое описание класса субгладких функционалов на компакте $C^1_{sub}(D)$. Прежде всего, легко видеть, что все такие функционалы удовлетворяют *условию Липшица.*

Теорема 2.42. *Пусть* D *— компакт в нормированном конусе* E. *Тогда* $Lip(D) \supset C^1_{sub}(D)$.

Простые примеры показывают, что $Lip(D) \neq C^1_{sub}(D)$.

Пример 2.2. Пусть $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$ при $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$. Непосредственное вычисление показывает:

$$\varliminf_{x \to 0} f'(x) = -1 < f'(0) = 0 < \varlimsup_{x \to 0} f'(x) = 1.$$

Таким образом, $f \notin C^1_{sub}(0)$. При этом, ввиду ограниченности f', $f \in Lip(\mathbb{R})$.

Сравним теперь субгладкость с *кусочной гладкостью.* Здесь мы будем понимать кусочную гладкость *в самом широком смысле*:

$$f \in C^1_{p.s.}\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\right),$$

если каждое сужение $f\big|_{D_i}$ принадлежит классу $C^1(D_i)$. При этом D_i — произвольные замкнутые области в E, пересекающиеся по границе.

Теорема 2.43. *Если $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i \subset E$, то верно включение:*

$$C^1_{p.s.}(D) \subset C^1_{sub}(D).$$

Аналогичные выкладки для "кусочно–субгладких" отображений приводят к несколько неожиданному выводу: *"кусочная" субгладкость совпадает с "полной" субгладкостью.*

Теорема 2.44. *Если $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i \subset E$, то $(C^1_{sub})_{p.s.}(D) = C^1_{sub}(D)$.*

Заметим, что существуют и *осциллирующие, не всюду дифференцируемые функции* класса $C^1_{sub}(D)$.

Пример 2.3. Пусть $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Здесь

$$\varliminf_{x\to 0} f'(x) = 1 = \overline{f'}(0);\ \ \varlimsup_{x\to 0} f'(x) = -1 = \underline{f'}(0).$$

Резюмируя, заметим, что в случае компактной области D имеет место двухсторонняя строгая оценка класса $C^1_{sub}(D)$:

$$C^1_{p.s.}(D) \subsetneqq C^1_{sub}(D) \subsetneqq Lip(D).$$

2.2.7 Связь K–субдифференцируемости на отрезке с обычной дифференцируемостью.

Здесь мы опираемся на результат, полученный Ф. С. Стонякиным, в связи с обобщением теоремы Данжуа–Янг–Сакса на случай K–субдифференциалов ([1], [3]). Напомним его.

Теорема 2.45. *Пусть F — банахово пространство, $F : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$. Если отображение f непрерывно на $[a;b]$ и K–субдифференцируемо почти всюду на $[a;b]$, то f почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$ в обычном смысле.*

Отсюда легко следует, что непрерывная K–субдифференцируемость f в любой точке отрезка влечет обычную дифференцируемость в этой точке.

Теорема 2.46. *Если, в условиях теоремы 2.45, отображение f непрерывно K–субдифференцируемо в некоторой точке $x \in [a;b]$, то f дифференцируемо в точке x в обычном смысле. В частности, класс непрерывно K–субдифференцируемых на отрезке отображений $C^1_K([a;b],F)$ совпадает с классом $C^1([a;b],F)$ отображений $f:[a;b]\to F$, непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ в обычном смысле.*

Эти результаты нетрудно распространить на случай векторного аргумента.

Теорема 2.47. *Пусть E и F — банаховы пространства, $f : E \supset U([a;b]) \to F$. Если отображение f K–субдифференцируемо всюду на $[a;b]$, то f дифференцируемо в обычном смысле всюду на $[a;b]\setminus e$, где*

$$mes\, \varphi^{-1}(e) = 0; \quad (\varphi(t) = (1-t)a + t\cdot b,\ 0 \le t \le 1).$$

В частности, если f непрерывно K–субдифференцируемо всюду на $[a;b]$, то $f \in C^1[a;b]$.

Замечание 2.24. Последний результат играет важную роль в теории K–субдифференциалов высших порядков. Из него будет следовать, что, в случае банаховых пространств, n–кратная K–субдифференцируемость на отрезке влечет $(n-1)$–кратную обычную дифференцируемость.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации окажется, что *собственно K–субдифференциал* (не совпадающий с обычным субдифференциалом) может существовать лишь *для старшего порядка* и лишь на *множестве меры нуль.*

3. Компактные субдифференциалы высших порядков и приложения к вариационным задачам

3.1 Компактные субдифференциалы высших порядков.

3.1.1 K–субдифференциалы второго порядка. Теорема Юнга о симметричности

Приведем вначале определение K–субдифференциала 2-го порядка, следуя стандартной индуктивной схеме. Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность $x \in E$, $\quad f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 3.1. *Пусть отображение f (сильно) K–субдифференцируемо на множестве $U(x)$. Если отображение*

$$\partial_{sub} f : E \supset U(x) \to L_K(E; F)$$

K–субдифференцируемо в точке x, то будем говорить, что f дважды K–субдифференцируемо в точке x, и введем K–субдифференциал второго порядка от f стандартным индуктивным образом:

$$\partial^2_{sub} f(x) := \partial_{sub}(\partial_{sub} f)(x).$$

Замечание 3.1. 1) В силу определения, $\partial^2_{sub} f(x) \in L_{sub}(E; L_K(E; F))$. Однако, используя каноническую изометрию конусов сублинейных и бисублинейных операторов (теорема 2.9), можно считать, что $\partial^2_{sub} f(x) \in L_K(E, E; F)$, т.е. $\partial^2_{sub} f(x)$ является *бисублинейным ограниченным оператором.*
2) Используя определение $\partial_{sub} f(x)$, приведем выражение $\partial^2_{sub} f(x)$ через K–предел:

$$\partial^2_{sub} f(x)h = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\Big\{ Z |\, \partial_{sub} f(x + th) = \partial_{sub} f(x) + t \cdot Z,\ 0 < t < \delta \Big\},$$

$$\text{где} \ \ Z \in L_K(E; F).$$

Отсюда, используя свойства K–пределов, можно получить оценку:

$$\partial^2_{sub} f(x)(h; k) \subset \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\Big\{ Y \in F_K |\, \partial_{sub} f(x+th) \cdot k = \partial_{sub} f(x) \cdot k + t \cdot Y,\ 0 < t < \delta \Big\} =$$

$$= \partial_{sub}(\partial_{sub} f(\cdot, k))(x)h.$$

Из последней оценки нетрудно получить следующую:

$$\partial_{sub} f(x)(x + h)k \in \partial_{sub} f(x)k + \partial^2_{sub} f(x)(h, k) + o(\|h\| \cdot \|k\|),$$

служащую K–аналогом классической формулы в банаховых пространствах:

$$(f'(x+h)-f'(x))k = f''(x)(h,k) + o(\|h\|\cdot\|k\|).$$

В случае нормированных пространств E и F, повторная K–субдифференцируемость f, в силу результатов предыдущего пункта, влечет обычную однократную дифференцируемость f в точке x.

Теорема 3.1. *Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ дважды K-субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо в обычным смысле в этой точке. В частности, если f дважды K–субдифференцируемо в окрестности $U(x)$, то*

$$\partial^2_{sub} f(x) = \partial_{sub}(f')(x).$$

На K–субдифференциалы 2–го порядка обобщается *классическая теорема Юнга о симметричности* второго сильного дифференциала. Вначале введем вспомогательное понятие.

Определение 3.2. *Для фиксированных $h,k \in E$ предположим, что существует следующий K–предел :*

$$\begin{aligned}\widehat{\partial}^2_{sub} f(x)(h,k) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\Big\{z\in F \Big| f(x+th+sk)+f(x) = \\ = f(x+th)+f(x+sk)+(st)z \Big| 0<t,s<\delta\Big\},\end{aligned} \tag{3.1}$$

который назовем бисимметрическим вторым K–субдифференциалом f в точке x по паре направлений (h,k).

Замечание 3.2. 1) В случае, если F — нормированное пространство, равенство (3.1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\widehat{\partial}^2_{sub} f(x)(h,k) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\Big\{\frac{f(x+th+sk)-f(x+th)-f(x+sk)+f(x)}{st}; \\ 0<t,s<\delta\Big\}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

2) Если $\widehat{\partial}^2_{sub} f(x)(h,k)$ — бисублинейный K–оператор, назовем его *слабым бисимметрическим K–субдифференциалом.* Понятия *бисимметрических K–субдифференциалов Гато и Фреше* вводятся аналогично случаю $\partial_{sub} f$.
3) Очевидно, $\widehat{\partial}^2_{sub} f(x)(h,k) = \widehat{\partial}^2_{sub} f(x)(k,h)$.

Основной результат этого раздела: в случае *банаховых пространств* E и F, второй K–субдифференциал $\partial^2_{sub}f(x)$, если он существует, совпадает со вторым бисимметрическим K–субдифференциалом $\widehat{\partial}^2_{sub}f(x)$ и, как следствие, является *симметрическим бисублинейным оператором.*

Теорема 3.2. *Пусть E и F — банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Если отображение f дважды K–субдифференцируемо в точке x, то f также бисимметрически K–субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial^2_{sub}f(x)(h,k) = \widehat{\partial}^2_{sub}f(x)(h,k).$$

В частности,

$$\partial^2_{sub}f(x)(h,k) = \partial^2_{sub}f(x)(k,h) \quad (\forall h,k \in E).$$

Замечание 3.3. Отметим, в заключении этого пункта, что симметричность $\partial^2_{sub}f(x)$ — лишь следствие более важного результата: возможности представления $\partial^2_{sub}f(x)$ через "одинарный" K–предел (3.2).

3.1.2 K–субдифференциалы высших порядков. Общая теорема Юнга

Примененный нами подход позволяет использовать индукцию для определения K–субдифференциала n–го порядка. Далее, как и в предыдущем пункте, E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 3.3. *Пусть отображение f K–субдифференцируемо* $(n-1)$ *раз в* $U(x)$*. Если отображение:*

$$\partial^{n-1}_{sub}f : E \supset U(x) \longrightarrow L_K(\underbrace{E,...,E}_{n-1};F) =: L^{n-1}_K(E;F)$$

K–субдифференцируемо в точке x, то мы будем говорить, что f n раз K–субдифференцируемо в точке x и введем K–субдифференциал n–го порядка от f стандартным индуктивным образом:

$$\partial^n_{sub}f(x) := \partial_{sub}(\partial^{n-1}_{sub}f)(x).$$

Замечание 3.4. В силу определения, $\partial^n_{sub}f(x) \in L_{sub}(E; L^{n-1}_K(E;F))$. Однако, используя (как и при $n=2$) каноническую изометрию (теорема 2.9), можно считать, что $\partial^n_{sub}f(x) \in L^n_K(E;F)$, т.е. является *$n$–сублинейным ограниченным K–оператором.*

В случае *нормированных пространств E и F*, n–кратная K–субдифференцируемость f в точке x влечет обычную $(n-1)$–кратную дифференцируемость f в этой точке.

Теорема 3.3. *Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K–субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо $(n-1)$ раз в обычном смысле в этой точке. В частности, если f n раз K–субдифференцируемо в $U(x)$, то*

$$\partial^n_{sub} f(x) = \partial_{sub}\Big(f^{(n-1)}\Big)(x). \tag{3.3}$$

Отметим также, по аналогии с теоремой 2.22, связь кратной K–субдифференцируемости с обычной кратной дифференцируемостью.

Теорема 3.4. *Пусть E, F — нормированные пространства. Тогда:*
(i) Если f n раз сильно дифференцируемо в точке $x \in E$, то f n раз сильно K–субдифференцируемо в этой точке, причем

$$\partial^n_{sub} f(x) = \{f^{(n)}(x)\}.$$

(ii) Обратно, пусть f n раз сильно K–субдифференцируемо в точке x. Если для каждого набора направлений $\{h_1, ..., h_n\} \subset E$ выполнены условия:

1) $\partial^n_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n)$ — одноэлементное множество;

2) $\partial^n_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n)$ антисимметричен по каждому направлению h_i $(i = \overline{1,n})$; то f сильно дифференцируемо n раз (в обычном смысле) в точке x.

Далее, для переноса теоремы Юнга на случай K–субдифференциалов n-го порядка нам понадобится понятие *полисимметрического K–субдифференциала.* Здесь мы для простоты рассмотрим только случай нормированных пространств.

Определение 3.4. *Пусть E и F — нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$, $(h_1, ..., h_n) \subset E)$. Выражение*

$$\widehat{\Delta}^n f(x, h_1, ..., h_n) = f\Big(x + \sum_{k=1}^{n} h_k\Big) - \sum_{1 \le k_1 < ... < k_{n-1} \le n} f\Big(x + \sum_{i=1}^{n-1} h_{k_i}\Big) +$$

$$+ \sum_{1 \le k_1 < ... < k_{n-2} \le n} f\Big(x + \sum_{i=1}^{n-2} h_{k_i}\Big) - ... + (-1)^n f(x)$$

назовем полисимметрической разностью n–го порядка для f в точке x, отвечающей набору направлений $(h_1, ...h_n)$.

Если существует K–предел:

$$\widehat{\partial}^n_{sub} f(x, h_1, ..., h_n) = K\text{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co}\Big\{ \frac{\widehat{\Delta}^n f(x; t_1 h_1, t_2 h_2 ..., t_n h_n)}{t_1 \cdot ... \cdot t_n} \Big| 0 < t_1, ..., t_n < \delta \Big\},$$

то назовем его полисимметрическим K–субдифференциалом f в точке x по полинаправлению $(h_1, ..., h_n)$.

Замечание 3.5. 1) Если $\widehat{\partial}^n_{sub} f(x, h_1, ..., h_n)$ — n–сублинейный K–оператор, назовем его *слабым полисимметрическим K–субдифференциалом.* Понятия полисимметрических K–субдифференциалов Гато и Фреше вводятся аналогично случаю $\partial_{sub} f$.

2) Очевидно,

$$\widehat{\partial}^n_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n) = \widehat{\partial}^n_{sub} f(x)(h_{p(1)}, ..., h_{p(n)})$$

для любой перестановки p набора $(1, ..., n)$.

Общая теорема Юнга для K–субдифференциалов n–го порядка имеет следующий вид.

Теорема 3.5. *Пусть E и F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K–субдифференцируемо в точке x, то существует и n–симметрический K–субдифференциал f в этой точке, причем эти K–субдифференциалы совпадают:*

$$\partial^n_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n) = \widehat{\partial}^n_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n) \quad (\forall h_1, ..., h_n \subset E).$$

В частности, $\partial^n_{sub} f(x)$ — симметрический n-сублинейный K–оператор:

$$\partial^n_{sub} f(x)(h_1, ..., h_n) = \partial^n_{sub} f(x)(h_{p(1)}, ..., h_{p(n)}) \quad (\forall h_1, ..., h_n \subset E)$$

для любой перестановки p набора индексов $1, ..., n$.

3.1.3 K–субдифференциалы высших порядков от функционалов.

Используя теоремы 3.3 и 2.17, нетрудно вывести формулу K–субдифференциала n–го порядка для случая $f : E \to \mathbb{R}$, если E — *нормированное пространство.* Далее для $h \in E$ обозначим через $(h)^n$ диагональный поливектор $(\underbrace{h, ..., h}_{n})$.

Теорема 3.6. *Пусть E — нормированное пространство. Если функционал $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K–субдифференцируем n раз в $U(x)$, то $\forall\, h \in E$ имеет место равенство:*

$$\partial^n_{sub} f(x)(h)^n = \left[\frac{\partial}{\underline{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot) \cdot (h)^{n-1}\Big)(x); \frac{\overline{\partial}}{\partial h}\Big(f^{(n-1)}(\cdot) \cdot (h)^{n-1}\Big)(x)\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\underline{\partial h}}; \frac{\overline{\partial}}{\partial h}\right] \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial h^{n-1}}\right)(x) \cdot (h)^n.$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to \mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$\partial^n_{sub} f(x) = \left[\frac{d}{\underline{dx}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x); \frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x)\right] := \left[\frac{d^n f}{\underline{dx^n}}(x); \frac{\overline{d^n f}}{dx^n}(x)\right].$$

Рассмотрим далее случай функционала от нескольких переменных $f : E_1 \times ... \times E_m \to \mathbb{R}$, где $E_1, ..., E_m$ — *нормированные пространства.* Здесь мы опираемся на теорему 2.24 и известную формулу для дифференциалов Фреше, используя стандартные сокращения.

Теорема 3.7. *Пусть* $E_1, ..., E_m$ — *нормированные пространства. Если функционал* $f : E_1 \times ... \times E_m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K*–субдифференцируем* n *раз в точке* $U(x)$, *то имеет место оценка:*

$$\partial^n_{sub} f(x)(h)^n \subset \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_K \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m\right)^{n-1} \cdot f\right](x) \cdot h_i. \qquad (3.4)$$

Выделим случай функционала $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, когда оценка (3.4) переходит *в точное равенство.*

Теорема 3.8. *Если функционал* $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K*–субдифференцируем* n *раз в* $U(x)$, *то справедливо равенство:*

$$\partial^n_{sub} f(x)(h)^n = \left[\sum_{i=1}^{m} \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}} h_i; \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i} h_i\right] \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m\right)^{n-1} \cdot f\right)(x). \quad (3.5)$$

Замечание 3.6. Отметим, что вводя в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *нижнюю и верхнюю матрицы Якоби* n*–го порядка*:

$$\underline{J}^n f = \left(\underline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right) =: \left(\underline{\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}}\right) \text{ и } \overline{J^n} f = \left(\frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right) =:$$

$$=: \left(\frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}\right),$$

равенство (3.5) можно записать в виде:

$$\partial^n_{sub} f(x) \cdot (h)^n = [\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)] \cdot (h)^n,$$

где $[\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)]$ — (n^m)–мерный матричный отрезок, соединяющий концевые матрицы (по главной диагонали).

В частности, в важном далее для приложений случае $n = 2$, мы получаем равенство:

$$\partial^2_{sub} f(x) \cdot (h)^n = [\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)] \cdot (h)^2,$$

где $[\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)]$ — 2^m–мерный матричный прямоугольник, соединяющий *нижнюю и верхнюю матрицы Гессе*. Вершинами этого прямоугольника служат 2^m матриц, одна часть строк которых берется из $\underline{J}^2 f(x)$, а другая часть строк — из $\overline{J}^2 f(x)$.

Следствие 3.1. *Если отображение* $f = (f_1, ..., f_l) : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}^l$ *K–субдифференцируемо n раз в $U(x)$, то имеет место оценка:*

$$\partial^n_{sub} f(x)(h)^n \subset \prod_{j=1}^{l} \left[\sum_{i=1}^{m} \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}} h_i ; \sum_{i=1}^{m} \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}} h_i \right] \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m \right)^n \cdot f_j \right)(x).$$

3.1.4 K–субдифференциалы и субгладкость высших порядков.

Здесь, опираясь на результаты пунктов 2.2.6 и 3.1.3, мы вводим понятие *субгладкости n–го порядка* и показываем, что такая субгладкость является достаточным условием K–субдифференцируемости n-го порядка. Вначале приведем обобщение теоремы 2.37.

Теорема 3.9. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ $(n-1)$ раз K–субдифференцируемо в точке x и n раз K–субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot{U}(x)$. Если отображение $\partial^n_{sub} f : E \supset \dot{U}(x) \to L^n_K(E; F)$ субнепрерывно в точке x ($\partial^n_{sub} f \in C_{sub}(x)$), т. е. при некотором $\mathcal{D}^n_{f,x} \in L^n_K(E; F)$ верно:*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial^n_{sub} f(x+h) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x} + Y, \; \text{где} \; \|Y\| < \varepsilon),$$

то f K–субдифференцируемо n раз в точке x, причем $\partial^n_{sub} f(x) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x}$.

Определение 3.5. *Будем говорить, что $f : E \supset U(x) \to F$ — субгладкое отображение n–го порядка (или C^n–субгладкое отображение) в точке x, и писать $f \in C^n_{sub}(x)$, если $\partial^n_{sub} f \in C_{sub}(x)$. В случае $n = 0$ мы отождествляем классы $C^0_{sub}(x)$ и $C_{sub}(x)$.*

Перенесем на случай высших порядков *достаточное условие n–кратной K-субдифференцируемости* в терминах частных K–субдифференциалов (теорема 2.38).

Теорема 3.10. *Пусть $E_1, ..., E_n, F$ — нормированные конусы, $f : E_1 \times ... \times E_m \supset$ $\supset U(x) \to F$. Тогда*

$$(f \in C^n_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}} \right)_{sub} \in C_{sub}(x), \; (\forall \, 1 \le i_1 \le ... \le i_n \le m) \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\exists \, \partial^n_{sub} f(x) \right).$$

Рассмотрим теперь, опираясь на результаты пунктов 2.2.6 и 3.1.3, случай функционалов $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.11. *Пусть* $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C^n_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \Bigg(\textit{все} \quad \frac{\partial}{\underline{\partial x_{i_n}}}\Bigg(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_{n-1}}}\Bigg) \textit{ и } \frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}}\Bigg(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_{n-1}}}\Bigg)$$

полунепрерывны в точке x, *соответственно, снизу и сверху*$\Bigg) \Longrightarrow \Big(\exists\, \partial^n_{sub} f(x)\Big)$.

Приведем простой пример.

Пример 3.1. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i)^{n-1} \cdot |x_i|$. Тогда:

$$\frac{\partial^n f}{\underline{\partial x_i}}(x) = \begin{cases} (n-1)! \cdot sign\, x_i, & x_i \neq 0 \\ -(n-1)! & , x_i = 0 \end{cases}; \quad \frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} (n-1)! \cdot sign\, x_i, & x_i \neq 0 \\ (n-1)! & , x_i = 0 \end{cases}.$$

Кроме того, все смешанные верхние и нижние частные производные от f равны нулю. Легко видеть, что все $(\partial^n f/\underline{\partial x_i^n})$ полунепрерывны снизу, а все $(\overline{\partial^n f}/\partial x_i^n)$ полунепрерывны сверху. Таким образом, в силу теоремы 3.11, $f \in C^n_{sub}(0)$.

Замечание 3.7. 1) Вводя нижнюю и верхнюю K–матрицы Якоби n–го порядка:

$$\underline{J}^n f = \Bigg(\frac{\partial^n f}{\underline{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_n}}}\Bigg); \ \overline{J^n} f = \Bigg(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_n}}\Bigg),$$

теорему 3.11 можно сформулировать так:
$(f \in C^n_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \Bigg(\underline{J}^n f$ и $\overline{J^n} f)$ полунепрерывны в точке x, соответственно, снизу и сверху$\Bigg)$.

2) Наконец, опираясь на описание класса $C^1_{sub}(D)$ в п. 2.2.6 и определение класса $C^n_{sub}(D)$, нетрудно дать примерное описание класса $C^n_{sub}(D)$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^m$.
(i) Очевидно, $(f \in C^n_{sub}(D)) \Longrightarrow (f^{(n-1)} \in Lip(D))$, что мы кратко запишем в виде:

$$C^n_{sub}(D) \subset Lip^n(D).$$

Модификация примера 2.2: $f(x) = x^{2n} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, показывает, что последнее включение является строгим.
(ii) Теорема 2.43 без труда переносится на случай кусочной гладкости и субгладкости высших порядков:

$$C^n_{p.s.}(D) \subset C^n_{sub}(D).$$

Это включение также является строгим. При этом "кусочная" субгладкость n–го порядка не отличается от "полной" субгладкости:

$$\left(C^n_{sub}\right)_{p.s.}(D) = C^n_{sub}(D).$$

Таким образом, в случае компактной области $D \subset \mathbb{R}^m$ имеем:

$$C^n_{p.s.}(D) \underset{\neq}{\subsetneq} C^n_{sub}(D) = (C^n_{sub})_{p.s.}(D) \underset{\neq}{\subsetneq} Lip^n(D).$$

3.1.5 Формула Тейлора в K–субдифференциалах и исследование на экстремум.

Мы рассмотрим здесь формулу Тейлора в форме Пеано лишь в случае отображений в *нормированных пространствах*. В этом случае только последнее слагаемое в многочлене Тейлора будет многозначным, что существенно упрощает применения.

Теорема 3.12. *Пусть E, F — нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Если f K–субдифференцируемо n раз в точке x, то:*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial^n_{sub} f(x)\cdot(h)^n = o(\|h\|^n). \tag{3.6}$$

Если при этом f K–субдифференцируемо n раз в окрестности x, то равенство (3.6) принимает вид:

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial_{sub}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h = o(\|h\|^n).$$

Следствие 3.2. *В условиях теоремы 3.12 справедлива оценка:*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right] \in \left[\frac{1}{n!}\partial^n_{sub} f(x)(h)^n + o(\|h\|^n)\right]. \tag{3.7}$$

Если при этом f K–субдифференцируемо n раз в окрестности x, то оценка (3.7) принимает вид:

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right] \in \frac{1}{n!}\partial_{sub}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h + o(\|h\|^n).$$

Заметим, что условие (3.7) не равносильно условию (3.6), ввиду многозначности обеих слагаемых справа в (3.7). Выделим здесь также случай функционалов, опираясь на результат п.3.1.4.

Теорема 3.13. *Пусть E – нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Если функционал f K–субдифференцируем n раз в окрестности x, то*

$$\Big[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\Big]-\frac{1}{n!}\Big[\underline{\frac{\partial}{\partial h}};\overline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big]\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h=o(\|h\|^n). \quad (3.8)$$

В случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ равенство (3.8) принимает вид:

$$\Big[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\Big]-\frac{1}{n!}\Big[\Big(\underline{\frac{\partial}{\partial x_1}}h_1+...+\underline{\frac{\partial}{\partial x_m}}h_m\Big);\Big(\overline{\frac{\partial}{\partial x_1}}h_1+...+\overline{\frac{\partial}{\partial x_m}}h_m\Big)\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+...+\frac{\partial}{\partial x_m}h_m\Big)^{n-1}\cdot f(x)\Big)=o(\|h\|^n). \quad (3.9)$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенство (3.9) принимает вид:

$$\Big[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\Big]-\frac{1}{n!}\Big[\underline{\frac{d^nf}{dx^n}}(x);\overline{\frac{d^nf}{dx^n}}(x)\Big]\cdot h^n=o(\|h\|^n), \quad (3.10)$$

где $\underline{\frac{d^nf}{dx^n}}=\underline{\frac{d}{dx}}(f^{(n-1)})$, $\overline{\frac{d^nf}{dx^n}}=\overline{\frac{d}{dx}}(f^{(n-1)})$.

Замечание 3.8. Многозначное равенство (3.10) можно записать в виде *однозначного равенства с параметром:*

$$\Big[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\Big]-\frac{1}{n!}\Big[(1-t)\underline{\frac{d^nf}{dx^n}}(x)+t\cdot\overline{\frac{d^nf}{dx^n}}(x)\Big]=o(\|h\|^n) \qquad (0\le t\le 1).$$

В аналогичном виде можно записать также равенства (3.8) – (3.9).

Перейдем к *условиям экстремума в терминах K–субдифференциалов.* Начнем с K–аналога леммы Ферма в традиционной для выпуклого анализа форме.

Теорема 3.14. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \longrightarrow \mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального экстремума в точке x и K–субдифференцируем в этой точке, то $\forall h \in E$:*

$$(0\in\partial_{sub}f(x)h)\Longleftrightarrow\Big(\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\le 0\le\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\Big). \quad (3.11)$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ условие (3.11) принимает вид конечной системы двойных неравенств:

$$\Big\{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\le 0\le\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\Big\}_{i=\overline{1,m}}. \quad (3.12)$$

Наконец, в случае $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ система (3.12) сводится к неравенству:

$$\underline{\frac{df}{dx}}(x) \le 0 \le \overline{\frac{df}{dx}}(x).$$

Рассмотрим теперь условия 2–го порядка, предварительно введя необходимый аппарат теории квадратичных K–форм.

Определение 3.6. *Пусть E — выпуклый конус. Отображение $B : E \longrightarrow \mathbb{R}_K$ назовем квадратичной K–формой, если:*

$$B(\lambda h) = \lambda^2 \cdot B(h) \quad (\forall h \in E,\ \forall \lambda \ge 0).$$

K–форма B неотрицательна ($B \ge 0$), если

$$\max B(h) \ge 0 \quad (\forall\ h \in E).$$

K–форма B положительна ($B > 0$), если

$$\min B(h) > 0 \quad (\forall\ h \in E \setminus \{0\}).$$

В случае, когда E — нормированный конус, скажем, что K–форма B положительно определена ($B \gg 0$), если для некоторой положительной константы γ^2 :

$$\min B(h) \ge \gamma^2 \|h\|^2 \quad (\forall\ h \in E).$$

Условия $B \le 0$, $B < 0$ и $B \ll 0$ вводятся, как обычно, с помощью перехода к K–форме $(-B)$.

Теорема 3.15. *Пусть E — нормированное пространство. Если функционал $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$ дважды K–субдифференцируем в окрестности точки x, то $\forall h \in E$, $\|h\| = 1$, выполнено равенство:*

$$(\partial^2_{sub})f(x)(h)^2 = \left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}(f'(\cdot)h); \overline{\frac{\partial}{\partial h}}(f'(\cdot)h)\right] =: \left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}}(x); \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}}(x)\right].$$

Приведем необходимое условие второго порядка для минимума.

Теорема 3.16. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \longrightarrow \mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального минимума в точке x и дважды K–субдифференцируем в окрестности этой точки, то $\forall h \in E$, $\|h\| = 1$, выполнено неравенство:*

$$\left(\partial^2_{sub} f(x)(h)^2 \ge 0\right) \Longleftrightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}}(x)(h)^2 \ge 0\right). \tag{3.13}$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ неравенство (3.13) принимает вид условия неотрицательности максимума m–мерного отрезка, соединяющего "нижнюю" и "верхнюю" матрицы Гессе для f:

$$\max\left[\underline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x)\right)(h)^2; \overline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x)(h)^2\right] \geq 0. \tag{3.14}$$

Обозначая $J_1^2 f(x), ..., J_{2^m}^2 f(x)$ — вершины матричного отрезка, условие (3.14) можно переписать в более простой форме:

$$\max_{1\leq k\leq 2^m}\left(J_k^2 f(x)(h)^2\right) \geq 0 \quad (\forall\, h \in \mathbb{R}^m). \tag{3.15}$$

Наконец, в случае $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ матричное неравенство (3.15) превращается в скалярное неравенство:

$$\frac{\overline{d^2 f}}{dx^2}(x) \geq 0.$$

Выпишем теперь достаточного условие локального минимума в терминах второго K–субдифференциала.

Теорема 3.17. *Пусть E — нормированное пространство, $f: E \supset U(x) \longrightarrow \mathbb{R}$, функционал f дважды K–субдифференцируем в точке x, причем $f'(x) = 0$. Если выполнено условие:*

$$\partial_{sub}^2 f(x) \gg 0, \tag{3.16}$$

то f достигает строгого локального минимума в точке x.

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ неравенство (3.16) принимает вид условия положительной определенности набора "крайних" точек m-мерного отрезка $[\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)]$:

$$J_1^2 f(x) \gg 0;\ J_2^2 f(x) \gg 0; ...; J_{2^m}^2 f(x) \gg 0. \tag{3.17}$$

Наконец, в случае $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ система матричных неравенств (3.17) сводится к одному скалярному неравенству:

$$\underline{\frac{d^2 f}{dx^2}}(x) > 0.$$

В заключении рассмотрим простой пример.

Пример 3.2. Зададим в $\mathbb{R}^m$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2,\ x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_m \geq 0; \\ 2\|x\|^2,\ x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_m \leq 0; \end{cases}$$

достигающую, очевидно, строгого минимума в нуле. Имеем

$$\nabla f(x) = \begin{cases} 2x, \; x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m > 0; \\ 4x, \; x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m < 0; \end{cases}$$

При $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$ коэффициент в $\nabla f(x)h$ при x равен 2 или 4 и зависит от выбора направления h, откуда 0 — единственная стационарная точка. Наконец, как легко видеть, все "крайние" матрицы Гессе $J_k^2 f(0)$ являются диагональными матрицами, диагонали которых — наборы из чисел 2 и 4. Следовательно,

$$J_k^2 f(0) \gg 0 \quad (k = 1, \ldots, 2^m).$$

Таким образом, условие (3.16) теоремы 3.17 выполнено.

3.2 Приложения к вариационным задачам с субгладким интегрантом.

3.2.1 K–субдифференциал основного вариационного функционала.

Напомним классический результат. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{3.18}$$

Тогда вариационный функционал (3.18) сильно дифференцируем в $C^1[a; b]$, причём первая вариация Φ имеет вид:

$$\Phi'(y)h = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h'\right] dx \quad (\forall h \in C^1[a; b]). \tag{3.19}$$

Наша цель — обобщить равенство (3.19) на случай *субгладких интегрантов.* В этом случае точное равенство переходит в оценку K–субдифференциала $\partial_{sub}\Phi(y)$.

Теорема 3.18. *Пусть для вариационного функционала* (3.18) *интегрант* f *является* C^1–субладким*:* $f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3)$ *(см. определение 2.22). Тогда* Φ *сильно* K*–субдифференцируем всюду в* $C^1[a; b]$*, причём справедлива оценка:*

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset$$

$$\subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')h'\right) dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')h'\right) dx\right]$$

$$(\forall h \in C^1[a; b]). \tag{3.20}$$

Отметим частный случай оценки (3.20), когда интегрант образован внешней композицией субгладкой функции с гладкой.

Теорема 3.19. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int_a^b \underline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\ ;\right.$$

$$\left.\int_a^b \overline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\right] \quad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{3.21}$$

Ещё один существенный частный случай представляет внутренняя композиция субгладкой функции с гладкой. Здесь, для простоты, мы рассмотрим композицию только по третьей переменной.

Теорема 3.20. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,\varphi(y'))dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))hdx +$$

$$+\left[\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi'}(y')h'dx; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi'}(y')h'dx\right] \quad (h \in C^1[a;b]). \tag{3.22}$$

Отметим, в качестве конкретных примеров, случаи интегрантов, образованных композицией гладкой функции и модуля.

Пример 3.3. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{3.23}$$

Здесь, в обозначениях теоремы 3.19, $\varphi(t)=|t|$, откуда

$$[\underline{\varphi}(t);\overline{\varphi}(t)]=\begin{cases} sign\ t,\ t\neq 0;\\ [-1;1],\ t=0.\end{cases} \tag{3.24}$$

Подстановка (4.2) в (3.21), после преобразований, приводит к оценке

$$\partial_{sub}\Phi(y)h\subset\Bigg(\int\limits_{(y'>0)}\big(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\big)dx-\int\limits_{(y'<0)}\big(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\big)dx\Bigg)+$$
$$+\int\limits_{(y'=0)}[-1;1]\big(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\big)dx\,. \tag{3.25}$$

В частности, если $mes\,(f(x,y,y')=0)=0$, то оценка (4.3) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_a^b sign(y')\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\right)dx.$$

Пример 3.4. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,|y'|)dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Здесь также $\varphi(t)=|t|$, но уже в обозначениях теоремы 3.20. Подстановка (4.2) в (3.22), после преобразований, приводит к оценке

$$\partial_{sub}\Phi(y)h\subset\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)hdx+\int\limits_{(y'\neq 0)}sign(y')\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'dx+$$
$$+\left[-\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx;+\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx\right]. \tag{3.26}$$

В частности, если $mes\,(f(x,y,|y'|)=0)=0$, то оценка (4.4) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)h+sign(y')\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'\right]dx. \qquad (3.27)$$

Пример 3.5. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,|y|,y')dx.$$

Здесь, после аналогичных преобразований, приходим к оценке:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h\subset\int\limits_a^b\Bigg(\Big[\frac{\partial f}{\partial z}(x,|y|,y')h'dx+\int\limits_{(y\neq 0)} sign\,y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,|y|,y')hdx+$$

$$+\Big[-\int\limits_{(y=0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,y')hdx;+\int\limits_{(y=0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,y')hdx\Big]. \qquad (3.28)$$

В частности, если $mes(f(x,|y|,y')=0)=0$, то оценка (3.28) превращается в точное равенство:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_a^b\Big[sign\,y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,|y|,y')h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,|y|,y')h'\Big]dx.$$

3.2.2 K–аналоги основной вариационной леммы и уравнения Эйлера–Лагранжа.

Напомним классическую "основную вариационную лемму" : если

$$\int\limits_a^b\varphi(x)h(x)\equiv 0 \quad \left(\varphi\in C[a;b],\forall h\in C[a;b]\right),$$

то $\varphi(x)\equiv 0$ при $a\le x\le b$. Наше обобщение принимает форму оценки.

Теорема 3.21. *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2\in L_2[a;b]$. *Если*

$$0\in\left[\int\limits_a^b\varphi_1(x)h(x)dx;\int\limits_a^b\varphi_2(x)h(x)dx\right] \quad \left(\forall h\in C[a;b]\right),$$

то $0\in[\varphi_1;\varphi_2]\subset L_2[a;b]$.

Напомним теперь классическое уравнение Эйлера–Лагранжа: для вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b)$$

условие $\Phi'(y) = 0$ равносильно выполнению уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')\right) = 0. \tag{3.29}$$

В частности, если Φ достигает локального экстремума в точке y, то уравнение (3.29) для y верно. Теорема 3.21, вместе с оценкой (3.20) для K–субдифференциала от Φ, позволяют обобщить условие (3.29) на случай C^1–*субгладкого интегранта*; при этом результат принимает форму оценки.

Теорема 3.22. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{3.30}$$

Тогда условие $0 \in \partial_K \Phi(y)$ *равносильно выполнению* "включения Эйлера–Лагранжа"*:*

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')\right);\ \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')\right)\right] \tag{3.31}$$

почти всюду *на* $[a;b]$*. В частности, если* Φ *достигает локального экстремума в точке* y*, то включение* (3.31) *для* y *выполнено почти всюду на* $[a;b]$.

Решение включения (3.31) назовём *субэкстремалью* функционала (3.30).

Замечание 3.9. Включение Эйлера–Лагранжа (3.31) можно равносильным образом переписать в виде "уравнения Эйлера–Лагранжа с параметром":

$$\left[(1-t)\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') + t \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')\right] -$$
$$- \frac{d}{dx}\left[(1-t)\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') + t \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')\right] \overset{\text{п.в.}}{=} 0;$$

субэкстремаль $y(\cdot)$ является решением этого уравнения при некотором $t \in [0;1]$.

Исследуем, в качестве существенного частного случая, случай модулированного интегранта из примера 3.3.

Теорема 3.23. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{3.32}$$

Для функционала (3.32) *включение Эйлера-Лагранжа принимает вид* альтернативы*:*

$$\left[\begin{array}{l} \textit{либо } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \ (\textit{при } f(x,y,y') \neq 0); \\ \textit{либо } f(x,y,y') = 0 \ (\textit{без дополнительных условий}). \end{array}\right. \tag{3.33}$$

В частности, если $mes(f(x,y,y') = 0)$*, мы приходим к обычному уравнению Эйлера–Лагранжа для* f *(почти всюду).*

В заключении рассмотрим вариационную задачу с модулем под знаком интегранта (см. пример 3.4).

Теорема 3.24. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,|y'|)dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{3.34}$$

Для функционала (3.34) *включение Эйлера–Лагранжа принимает вид следующей альтернативы:*

$$\left[\begin{array}{l} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \ (\textit{при } y' > 0); \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,-y') + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,-y')\right) = 0 \ (\textit{при } y' < 0); \\ 0 \in \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,0) + \left[-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)\right); +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)\right)\right] \ (\textit{при } y' = 0). \end{array}\right.$$

В частности, если $mes(f(x,y,|y'|) = 0) = 0$*, мы приходим к уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|) - (sign\, y') \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)\right) = 0 \quad (\textit{п. в}) \tag{3.35}$$

3.2.3 Второй K–субдифференциал основного вариационного функционала.

Напомним классическую формулу второй вариации. Если

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b]), \tag{3.36}$$

то функционал (3.36) дважды сильно дифференцируем всюду в $C^1[a; b]$, причём для любого $h \in C^1[a; b]$:

$$\Phi''(y)(h)^2 = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, y')h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, y')h \cdot h' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y')h'^2\right] dx. \tag{3.37}$$

Мы обобщим здесь это условие на случай субгладких интегрантов класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$. При этом, как и в случае $\partial_{sub}\Phi$, точное равенство (3.37) переходит в оценку $\partial^2_{sub}\Phi$.

Теорема 3.25. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b]). \tag{3.38}$$

Функционал (3.38) *дважды K–субдифференцируем всюду в* $C^1[a; b]$, *причём справедлива оценка:*

$$\begin{gathered}
\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y')hh'\right) dx; \\
\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y')hh'\right) dx\Bigg] + \\
+\Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x, y, y')hh' + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y')h'^2\right) dx; \\
\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x, y, y')hh' + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y')h'^2\right) dx\Bigg].
\end{gathered} \tag{3.39}$$

Здесь, как и при оценке $\partial_{sub}\Phi$, мы также выделим случай интегранта, образованного внешней композицией субгладкой функции (теперь уже класса C^2_{sub}) с гладкой.

Теорема 3.26. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (\varphi \in C^2_{sub}(\mathbb{R}), f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]).$$

Тогда Φ *дважды* K*–субдифференцируем всюду в* $C^1[a;b]$*, причём справедлива оценка (в краткой записи):*

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \int\limits_a^b \varphi'(f)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2 \cdot f dx +$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi''}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2 + f_yzhh'\right)dx; \int\limits_a^b \overline{\varphi''}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2 + f_yzhh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi''}(f)\cdot\left(f_yzhh' + (f_z)^2h'^2\right)dx; \int\limits_a^b \overline{\varphi''}(f)\cdot\left(f_yzhh' + (f_z)^2h'^2\right)dx\right]. \qquad (3.40)$$

Рассмотрим, в качестве конкретного примера, класс интегрантов вида $f(x,y,y')\cdot|f(x,y,y')|$.

Теорема 3.27. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')\cdot|f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]).$$

Тогда справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \int\limits_a^b |f|\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial y}h'\right)^2\cdot f dx + 2\int\limits_{(f\neq 0)} sign f\cdot(f_y\cdot h + f_z\cdot h')^2\cdot dx +$$

$$+\left[-2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx;\ +2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[-2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}hh'+f_{z^2}h'^2\right)dx;\ +2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}hh'+f_{z^2}h'^2\right)dx\right]. \qquad (3.41)$$

В частности, если $mes(f(x,y,y')=0)=0$, *то оценка* (3.41) *переходит в точное равенство:*

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2=\Phi''(y)(h)^2=\int\limits_a^b|f|\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}h+\frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx+2\int\limits_a^b sign\ f\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx.$$

В заключение приведём простейший пример.

Пример 3.6. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b y'\cdot|y'|dx.$$

Здесь применение оценки (3.41) приводит к точному равенству:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2=\Phi''(y)(h)^2=2\int\limits_{(y'\neq 0)}(sign\ y')h'^2dx=2\int\limits_{(y'>0)}h'^2dx-2\int\limits_{(y'<0)}h'^2dx.$$

В частности, если $mes(y'\cdot|y'|=0)=0$, получаем:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2=\Phi_K(y)(h)^2=2\int\limits_a^b(sign\ y')\cdot h'^2dx.$$

3.2.4 $K-$аналог необходимого условия Лежандра.

Напомним классическое необходимое условие Лежандра для минимума основного вариационного функционала

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f\in C^2(\mathbb{R}^3), y\in C^1[a;b], y(a)=y_a, y(b)=y_b). \qquad (3.42)$$

Если функционал (3.42) достигает локального минимума в точке $y\in C^1[a;b]$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')\geq 0 \ \text{ всюду на [a;b].}$$

Мы обобщим здесь это условие на класс интегрантов второго порядка субгладкости. Как и в классическом случае, базовым является соответствующее условие неотрицательности квадратичного функционала.

Теорема 3.28. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \left[P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right] dx \quad (h \in C^1[a;b], h(a) = h(b) = 0).$$

Если коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ ограничены, $P(x)$ полунепрерывен сверху всюду на $[a;b]$, и $\widetilde{\Phi}(h) \geq 0$ при всех допустимых h, то

$$P(x) \geq 0 \text{ всюду на } [a;b].$$

Из теоремы 3.28, общей оценки $\partial^2_{sub}(\Phi)$ (теорема 3.25) и общего необходимого условия минимума в терминах второго K–субдифференциала (теорема 3.16) нетрудно получить необходимое условие второго порядка для минимума вариационного функционала с интегрантом из класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 3.29. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{3.43}$$

Если функционал (3.43) достигает локального минимума в точке $y \in C^1[a;b]$, то

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \geq 0 \text{ всюду на } [a;b]. \tag{3.44}$$

3.2.5 K–аналог достаточных условий Лежандра–Якоби.

Вначале напомним классические результаты, связанные с понятием сопряжённой точки.

Определение 3.7. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \left(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right) dx \quad (P, Q \in C[a;b],\ h \in C^1[a;b]). \tag{3.45}$$

Точка $\widetilde{x} \in (a;b)$ называется сопряжённой с a *для функционала (3.45), если уравнение Эйлера–Лагранжа для $\widetilde{\Phi}$:*

$$Qh - \frac{d}{dx}(Ph') = 0 \quad (h(a) = 0,\ h'(a) = 1)$$

имеет ненулевое решение $h(x)$, такое, что $h(\widetilde{x}) = 0$.

Достаточное условие Лежандра–Якоби положительной определённости квадратичного функционала (3.45) имеет следующий вид.

Теорема 3.30. *Если для квадратичного функционала* (3.45) *выполнены условия:*

(i) $P(x) > 0$ *при* $a \le x \le b$*;*

(ii) *отрезок* $(a; b]$ *не содержит точек, сопряженных с* a*;*

то квадратичный функционал (3.45) *положительно определен в* $C^1[a; b]$.

На основе теоремы 3.30 и формулы второй вариации доказываются достаточные условия Лежандра–Якоби для минимума вариационного функционала.

Теорема 3.31. *Пусть для вариационного функционала*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b).$$

функция y *— экстремаль. Если вдоль* y *выполнены условия:*

(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') > 0$ *при* $a \le x \le b$ *(усиленное условие Лежандра);*

(ii) для уравнения Якоби:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') \cdot h'\right) - \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, y')\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, y')\right] \cdot h = 0 \quad (h(a) = 0,\, h'(a) = 1) \tag{3.46}$$

выполнено условие Якоби отсутствия сопряжённых точек; то Φ *достигает в точке* y *строгого локального минимума.*

Наша цель — обобщить результат теоремы 3.30 на случай квадратичных функционалов с *ограниченными* и *полунепрерывными снизу* коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$, и на этой основе обобщить результат теоремы 3.31 на случай C^2–субгладкого интегранта. Заметим, что понятие *сопряжённой точки* переносится на этот случай без изменений. Сформулируем аналог теоремы 3.30.

Теорема 3.32. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \left(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right) dx \quad (h \in C^1[a; b]), \tag{3.47}$$

коэффициенты которого $P(x)$ *и* $Q(x)$ *ограничены и полунепрерывны снизу на* $[a; b]$*. Если для функционала* (3.45) *выполнены условия Лежандра–Якоби* $(i) - (ii)$ *из теоремы 3.30, то он положительно определён в* $C^1[a; b]$.

Теперь перейдём к центральному результату — C^2*–субгладкому аналогу теоремы 3.31.*

Теорема 3.33. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{3.48}$$

Предположим, что y *— субэкстремаль функционала* (3.48)*, т. е. почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа. Пусть вдоль субэкстремали* y *выполнены следующие условия:*

(i) $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') > 0$ *при* $a \leq x \leq b$ *("нижнее" усиленное условие Лежандра);*

(ii) для каждого из четырёх уравнений Якоби, *соответствующих вершинам двумерного матричного отрезка* $[\underline{J}^2 f(x);\, \overline{J}^2 f(x)]$*:*

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x, y, y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')\right] \cdot h = 0; \tag{3.49}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x, y, y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')\right] \cdot h = 0; \tag{3.50}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x, y, y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')\right] \cdot h = 0; \tag{3.51}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x, y, y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x, y, y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x, y, y')\right] \cdot h = 0; \tag{3.52}$$

$$(h(a) = 0,\ h'(a) = 1) \tag{3.53}$$

выполнены условия Якоби отсутствия сопряжённых точек.
Тогда функционал (3.48) *достигает строгого локального минимума в точке* y*.*

Замечание 3.10. При переходе к достаточным условиям максимума в теореме 3.33, условие (i) заменяется на условие:

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') < 0 \text{ при } a \leq x \leq b.$$

Условие (ii) остаётся без изменения.

4. Примеры вариационных задач с субгладким интегрантом.

4.1 K–субдифференциал основного вариационного функционала.

Пример 4.1. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x, y, y')|dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{4.1}$$

Здесь $\varphi(t) = |t|$, откуда

$$[\underline{\varphi}(t); \overline{\varphi}(t)] = \begin{cases} sign\ t,\ t \neq 0; \\ [-1; 1],\ t = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

После преобразований получаем оценку:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \left(\int\limits_{(f(x,y,y')>0)} (\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h')dx - \int\limits_{(f(x,y,y')<0)} (\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h')dx \right) + \\ + \int\limits_{(f(x,y,y')=0)} [-1; 1](\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h')dx\,. \tag{4.3}$$

В частности, если $mes\,(f(x, y, y') = 0) = 0$, то оценка (4.3) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int_a^b sign(f(x, y, y')) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h' \right) dx.$$

Примеры:

Пример 4.2. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi/2} |2y^2 - 3y'^2|dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Тогда

$$f(y, z) = 2y^2 - 3z^2$$

$$f_y = 4y; \quad f_z = -6z.$$

Получим оценку:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(2y^2-3y'^2\neq 0)} \text{sign }(2y^2 - 3y'^2)\big(4yh - 6y'h'\big)dx +$$

$$+ [-1; 1] \int\limits_{(2y^2-3y'^2=0)} (4yh - 6y'h')dx.$$

Если $mes(2y^2 - 3y'^2 = 0) = 0$, то получим точное равенство:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_0^{\pi/2} \text{sign}(2y^2 - 3y'^2)\big(4yh - 6y'h'\big)dx.$$

Пример 4.3. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y - 4y'|dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}], \ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Тогда

$$f(y, z) = y - 4z$$

$$f_y = 1; \quad f_z = -4.$$

Получим оценку:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(y-4y'\neq 0)} \text{sign }(y - 4y')\big(h - 4h'\big)dx + [-1; 1] \int\limits_{(y-4y'=0)} (h - 4h')dx.$$

Если $mes(y - 4y' = 0) = 0$, то получим точное равенство:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_0^{\pi/2} \text{sign}(y - 4y')\big(h - 4h'\big)dx.$$

Пример 4.4. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |-y^3 + 4y'^2|dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}], \ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Тогда

$$f(y, z) = -y^3 + 4z^2$$

$$f_y = -3y^2; \quad f_z = 8z.$$

Получим оценку:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(-y^3+4y'^2\neq 0)} \text{sign } (-y^3+4y'^2)\big(-3y^2h+8y'h'\big)dx+$$

$$+[-1;1]\int\limits_{(-y^3+4y'^2=0)}(-3y^2h+8y'h')dx.$$

Если $mes(-y^3+4y'^2=0)=0$, то получим точное равенство:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_0^{\pi/2} \text{sign}(-y^3+4y'^2)\big(-3y^2h+8y'h'\big)dx.$$

Пример 4.5. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |-y^3-2y'^2|dx \ (y \in C^1[0;\frac{\pi}{2}], \ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Тогда

$$f(y,z) = -y^3-2z^2$$

$$f_y = -3y^2; \quad f_z = -4z.$$

Получим оценку:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(-y^3-2y'^2\neq 0)} \text{sign } (-y^3-2y'^2)\big(-3y^2h-4y'h'\big)dx+$$

$$+[-1;1]\int\limits_{(-y^3-2y'^2=0)}(-3y^2h-4y'h')dx.$$

Если $mes(-y^3-2y'^2=0)=0$, то получим точное равенство:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_0^{\pi/2} \text{sign}(-y^3-2y'^2)\big(-3y^2h-4y'h'\big)dx.$$

Пример 4.6. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y+y'|dx \ (y \in C^1[0;\frac{\pi}{2}], \ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.7. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |5y^2 + 3y'^3| dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.8. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |-5y - 7y'^2| dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.9. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |-3y^2 + 5y'^2| dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.10. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |-3y^3 - 2y'| dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.11. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |-y^2 - 5y'^2| dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.12. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y^4 + 5y'^2| dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.13. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |7y - 2y'| dx \ (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.14. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, |y'|)dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Здесь $\varphi(t) = |t|$. После преобразований получаем оценку:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, |y'|)hdx + \int\limits_{(y'\neq 0)} sign(y') \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, |y'|)h'dx +$$

$$+ \left[-\int\limits_{(y'=0)} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 0)h'dx; + \int\limits_{(y'=0)} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 0)h'dx \right]. \qquad (4.4)$$

В частности, если $mes\,(f(x, y, |y'|) = 0) = 0$, то оценка (4.4) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, |y'|)h + sign(y') \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, |y'|)h' \right] dx. \qquad (4.5)$$

Примеры:

Пример 4.15. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^2 (xy + e^{|y'|})dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_0^2 xhdx + \int\limits_{(y'\neq 0)} sign(y')e^{|y'|}h'dx + [-1;1] \int\limits_{(y'=0)} h'dx. \qquad (4.6)$$

В частности, если $mes(xy + e^{|y'|} = 0) = 0$, то оценка (4.6) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_0^2 \left[xh + sign(y')e^{|y'|}h' \right] dx.$$

Рассмотрим полярный случай, когда $y_0(x) \equiv const$. В этом случае оценка (4.6) примет вид равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y_0)h = \int\limits_0^2 xhdx.$$

Пример 4.16. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_1^2(1+x^2)\cos|y'|dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

$$\partial_{sub}\Phi(y)h=-\int\limits_{(y'\neq 0)}(1+x^2)sign(y')\sin|y'|h'dx=-\int\limits_{(y'\neq 0)}(1+x^2)\sin y'h'dx \quad (4.7)$$

В частности, если $mes((1+x^2)\cos|y'|=0)=0$, то равенство (4.7) принимает вид:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h=-\int\limits_1^2(1+x^2)\sin y'h'dx.$$

Рассмотрим полярный случай, когда $y_0(x)=kx, \quad k>0$. В этом случае равенство (4.7) примет вид:

$$\partial_{sub}\Phi(y_0)h=-\int\limits_1^2(1+x^2)\sin kh'dx=-\sin k\int\limits_1^2(1+x^2)h'dx.$$

Пример 4.17. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_0^{\pi/4}(\sin x+4y+|y'|)dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

$$\partial_{sub}\Phi(y)h\subset 4\int\limits_0^{\pi/4}hdx+\int\limits_{(y'\neq 0)}sign(y')h'dx+[-1;1]\int\limits_{(y'=0)}h'dx \qquad (4.8)$$

В частности, если $mes(\sin x+4y+|y'|=0)=0$, то оценка (4.8) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_0^{\pi/4}\Big[4h+sign(y')h'\Big]dx.$$

Рассмотрим полярный случай, когда $y_0(x)\equiv const$. В этом случае оценка (4.8) примет вид:

$$\partial_{sub}\Phi(y_0)h\subset 4\cdot\int\limits_0^{\pi/4}hdx+[-1;1]\int\limits_0^{\pi/4}h'dx.$$

Пример 4.18. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_1^2 (x^2y^2 + 12|y'|)dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset 2\int_1^2 x^2yhdx + 12\int_{(y'\neq 0)} sign(y')h'dx + [-12;12]\int_{(y'=0)} h'dx \qquad (4.9)$$

В частности, если $mes(x^2y^2 + 12|y'| = 0) = 0$, то оценка (4.9) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int_1^2 \Big[2x^2yh + 12sign(y')h'\Big]dx.$$

Рассмотрим полярный случай, когда $y_0(x) \equiv const = C$. В этом случае оценка (4.9) примет вид:

$$\partial_{sub}\Phi(y_0)h \subset 2C \cdot \int_1^2 x^2hdx + [-12;12]\int_1^2 h'dx.$$

Пример 4.19. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_0^1 (2e^{2x}y + tg|y'|)dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.20. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi/3} \Big(\sin 2x + y^2\Big)\frac{|y'|}{3}dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C(^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.21. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi} (y + \cos(x|y'|))dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.22. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_0^1 (xy+sh|y'|)dx \quad (y\in C^1[a;b],\, f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.23. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_{-1}^0 y|y'|dx \quad (y\in C^1[a;b],\, f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.24. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_1^3 (2y+x|y'|)dx \quad (y\in C^1[a;b],\, f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.25. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_0^1 xy^2|y'|dx \quad (y\in C^1[a;b],\, f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Пример 4.26. Найти оценку K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_1^2 \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{|y'|}{4}\right)dx \quad (y\in C^1[a;b],\, f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

4.2 K–аналоги основной вариационной леммы и уравнения Эйлера–Лагранжа.

Пример 4.27. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_0^{\pi/2} |y'^2-y^2|dx. \tag{4.10}$$

Здесь $f(y,z)=z^2-y^2, \quad L(f)(y)=-2y-2y''$. При этом

$$f(y,y')=y'^2-y^2=0 \Longleftrightarrow y'=\pm y,$$

поэтому:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & y'' + y = 0, \text{ при } y' \neq \pm y \\ \text{либо} & y' = \pm y, \text{ при } y' = \pm y \end{array}\right. . \tag{4.11}$$

Решая уравнения в (4.11), приходим к условиям

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ \text{либо} & y = M \cdot e^{\pm x} \end{array}\right. . \tag{4.12}$$

Рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \sin x, \text{ при } 0 \leq x \leq \pi/4; \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4} \cdot e^x, \text{при } \pi/4 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}.$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий (4.12). Таким образом $y_0(x)$ — субэкстремаль, при этом:

$$\begin{cases} y_0(\pi/4 - 0) = \sin \pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0(\pi/4 + 0), \\ y_0'(\pi/4 - 0) = \cos \pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0'(\pi/4 + 0), \end{cases}$$

откуда следует, что $y_0 \in C^1[0; \pi/2]$.

При этом прямая проверка достаточных условий Лежандра – Якоби показывает, что на экстремали $y_1(x) = \sin x$ вариационный функционал

$$\Phi_1(y) = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx$$

достигает строгого локального минимума. Тогда из неравенства

$$\widehat{\Phi}_1(y) = \int\limits_0^{\pi/4} |y'^2 - y^2| dx \geq \Phi_1(y) \geq \Phi_1(y_1)$$

следует, что вариационный функционал $\widehat{\Phi}_1(y)$ тем более достигает на экстремали $y_1(x)$ строгого локального минимума. Далее, поскольку вариационный функционал

$$\Phi_2(y) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} |y'^2 - y^2| dx$$

неотрицателен и на экстремали $y_2(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4} \cdot e^x$ обращается в нуль, то Φ_2 достигает строгого локального минимума на экстремали $y_2(x)$. Наконец, поскольку

$$\Phi(y) = \widehat{\Phi}_1\left(y\Big|_{[0;\pi/4]}\right) + \Phi_2\left(y\Big|_{[\pi/4;\pi/2]}\right),$$

то вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого локального минимума на субэкстремали

$$y_0(x) = \begin{cases} y_1(x), \ 0 \le x \le \pi/4\,; \\ y_2(x), \ \pi/4 \le x \le \pi/2\,. \end{cases}$$

Таким образом, на данной субэкстремали $y_0(x)$ достигается строгий локальный минимум вариационного функционала (4.10).

Примеры:

Пример 4.28. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - 7y^2| dx.$$

Здесь

$$f(y, z) = z^2 - 7y^2, \ L(f)(y) = -14y - 2y''.$$

При этом $f(y, y') = y'^2 - 7y^2 = 0 \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{7}y$, поэтому:

$$\begin{cases} y'' + 7y = 0, \ \text{при } y' \ne \pm\sqrt{7}y, \\ y' = \pm\sqrt{7}y. \end{cases}$$

Решая уравнения, приходим к условиям

$$\begin{cases} y = C_1 \cos\sqrt{7}x + C_2 \sin\sqrt{7}x, \\ y = C_3 e^{\sqrt{7}}x + C_4 e^{-\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Положим $C_3 = 1, C_4 = 0$. Приравняем уравнения и их производные:

$$\begin{cases} C_1 \cos\sqrt{7}x + C_2 \sin\sqrt{7}x = e^{\sqrt{7}}x, \\ -\sqrt{7}C_1 \sin\sqrt{7}x + \sqrt{7}C_2 \cos\sqrt{7}x = \sqrt{7}e^{\sqrt{7}}x. \end{cases}$$

Пусть $x = \frac{pi}{4\sqrt{7}}$. Найдем C_1, C_2.

$$\begin{cases} (C_1 + C_2)\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{\pi}{4}}, \\ (-C_1 + C_2)\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{7}e^{\frac{\pi}{4}}. \end{cases}$$

$\Rightarrow C_1 = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}; C_2 = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} \cos\sqrt{7}x + \dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{7}x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4\sqrt{7}}; \\ y = e^{\sqrt{7}x}, & \dfrac{\pi}{4\sqrt{7}} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий. Таким образом $y_0(x)$ – субэкстремаль, при этом:

$$\begin{cases} y_0(\frac{\pi}{4\sqrt{7}} - 0) = y_0(\frac{\pi}{4\sqrt{7}} + 0), \\ y_0'(\frac{\pi}{4\sqrt{7}} - 0) = y_0'(\frac{\pi}{4\sqrt{7}} + 0), \end{cases}$$

откуда следует, что $y_0(x) \in C^1[0; \pi/2]$.

Пример 4.29. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |11y'^2 - 2y^2| dx.$$

Здесь

$$f(y,z) = 11z^2 - 2y^2,\ L(f)(y) = -4y - 22y''.$$

При этом $f(y,y') = 11y'^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}y$, поэтому:

$$\begin{cases} 11y'' + 2y = 0, \text{ при } y' \neq \pm\sqrt{\frac{2}{11}}y, \\ y' = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}y. \end{cases}$$

Решая уравнения, приходим к условиям

$$\begin{cases} y = C_1 \cos\sqrt{\frac{2}{11}}x + C_2 \sin\sqrt{\frac{2}{11}}x, \\ y = C_3 e^{\sqrt{2/11}}x + C_4 e^{-\sqrt{2/11}}x. \end{cases}$$

Положим $C_3 = 1, C_4 = 0$. Приравняем уравнения и их производные

$$\begin{cases} C_1 \cos\sqrt{\frac{2}{11}}x + C_2 \sin\sqrt{\frac{2}{11}}x = e^{\sqrt{\frac{2}{11}}x}, \\ -\sqrt{\frac{2}{11}}C_1 \sin\sqrt{\frac{2}{11}}x + \sqrt{\frac{2}{11}}C_2 \cos\sqrt{\frac{2}{11}}x = \sqrt{\frac{2}{11}}e^{\sqrt{\frac{2}{11}}x}. \end{cases}$$

Пусть $x = \sqrt{\frac{11}{2}}\frac{\pi}{6}$. Найдем C_1, C_2.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = e^{\frac{\pi}{6}}, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{11}C_2 = \sqrt{\frac{2}{11}}e^{\frac{\pi}{6}}. \end{cases}$$

$\Rightarrow C_1 = \frac{6\sqrt{11}-\sqrt{6}}{4\sqrt{33}} e^{\pi/6}; C_2 = \frac{2\sqrt{11}+\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} e^{\pi/6}$. Рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \dfrac{6\sqrt{11}-\sqrt{6}}{4\sqrt{33}} e^{\pi/6} \cos\sqrt{\dfrac{2}{11}}x + \dfrac{2\sqrt{11}+\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} e^{\pi/6} \sin\sqrt{\dfrac{2}{11}}x, & 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\dfrac{11}{2}}\dfrac{\pi}{6}; \\ y = e^{\sqrt{2/11}x}, & \sqrt{\dfrac{11}{2}}\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий. Таким образом $y_0(x)$ – субэкстремаль, при этом:

$$\begin{cases} y_0(\sqrt{\frac{11}{2}}\frac{\pi}{6} - 0) = y_0(\sqrt{\frac{11}{2}}\frac{\pi}{6} + 0), \\ y_0'(\sqrt{\frac{11}{2}}\frac{\pi}{6} - 0) = y_0'(\sqrt{\frac{11}{2}}\frac{\pi}{6} + 0), \end{cases}$$

откуда следует, что $y_0(x) \in C^1[0; \pi/2]$.

Пример 4.30. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |3y'^2 - yy' - 4y^2| dx.$$

Здесь

$$f(y,z) = 3z^2 - yz - 4y^2, \; L(f)(y) = -8y - 6y''.$$

Условие принимает вид:

$$\begin{cases} 3y'' + 4y = 0, \text{ при } 3y'^2 - yy' - 4y^2 \neq 0, \\ 3y'^2 - yy' - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение, получим

$$y = C_1 \cos\frac{1}{2\sqrt{2}}x + C_2 \sin\frac{1}{2\sqrt{2}}x.$$

Решим второе уравнение

$$3y'^2 - yy' - 4y^2 = 0.$$

Получим:

$$y_1' = \frac{y + 7y}{6} = \frac{4}{3}y; \qquad y_2' = \frac{y - 7y}{6} = -y.$$

Отсюда

$$dy_1 = \frac{4}{3}ydx; \quad dy_2 = -ydx; \quad \int \frac{dy_1}{y} = \frac{4}{3}\int dx, \quad \int \frac{dy_2}{y} = \int -dx$$

$$\Rightarrow y_1 = C_3 e^{4/3x}, \quad y_2 = C_4 e^{-x}.$$

Положим $C_3 = 1, C_4 = 0$. Тогда

$$y = e^{4/3x}.$$

Приравняем функции и их производные

$$\begin{cases} C_1 \cos \frac{2}{\sqrt{3}}x + C_2 \sin \frac{2}{\sqrt{3}}x = e^{4/3x}, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}C_1 \sin \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}C_2 \cos \frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{4}{3}e^{4/3x}. \end{cases}$$

Пусть $x = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. Найдем C_1, C_2.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}C_1 + C_2 = \frac{4}{3}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}}. \end{cases}$$

$\Rightarrow C_1 = \frac{4-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}}; C_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}}$. Имеем:

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \dfrac{4-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}} \cos \dfrac{2}{\sqrt{3}}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}} \sin \dfrac{2}{\sqrt{3}}x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}; \\ y = e^{4/3x}, & \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий. Таким образом, $y_0(x)$ – субэкстремаль, при этом:

$$\begin{cases} y_0(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} - 0) = y_0(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} + 0), \\ y_0'(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} - 0) = y_0'(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} + 0), \end{cases}$$

откуда следует, что $y_0(x) \in C^1[0; \pi/2]$.

Пример 4.31. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |3y'^2 - 2yy' - 16y^2| dx.$$

Пример 4.32. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |2y'^2 - y^2| dx.$$

Пример 4.33. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |3y'^2 - y^2| dx.$$

Пример 4.34. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |6y'^2 - y^2| dx.$$

Пример 4.35. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |5y'^2 - y^2| dx.$$

Пример 4.36. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - 2y^2| dx.$$

Пример 4.37. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |8y'^2 - y^2| dx.$$

Пример 4.38. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - 2yy' - y^2| dx.$$

Пример 4.39. Найти субэкстремаль вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |5y'^2 - 3yy' - 8y^2| dx.$$

4.3 Второй K–субдифференциал основного вариационного функционала.

Пример 4.40. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b y' \cdot |y'| dx.$$

Здесь имеет место точное равенство:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = 2 \int\limits_{(y'\neq 0)} (sign\ y')h'^2 dx = 2 \int\limits_{(y'>0)} h'^2 dx - 2 \int\limits_{(y'<0)} h'^2 dx.$$

В частности, если $mes(y' \cdot |y'| = 0) = 0$, получаем:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \Phi_K(y)(h)^2 = 2 \int\limits_a^b (sign\ y') \cdot h'^2 dx.$$

Примеры:

Пример 4.41. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (\ln y + e^{y'})|\ln y + e^{y'}| dx.$$

$$f(x,y,z) = \ln y + e^z, \quad f_y = \frac{1}{y}, \quad f_z = e^z, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{y^2} = -\frac{1}{y^2}, \qquad f_{z^2} = e^z.$$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \int\limits_a^b |\ln y + e^{y'}|(\frac{1}{y}h + e^{y'}h')^2(\ln y + e^{y'})dx +$$

$$+2 \int\limits_{(f\neq 0)} sign(\ln y + e^{y'})(\frac{1}{y}h + e^{y'}h')^2(\ln y + e^{y'})dx + [-2,+2] \int\limits_{(f=0)} (-\frac{1}{y^2}h^2)dx +$$

$$+[-2,+2] \int\limits_{(f=0)} (e^{y'}h'^2)dx.$$

В частности, если $mes(\ln y + e^{y'} = 0) = 0$, то оценка переходит в точное равенство:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = \int\limits_a^b |\ln y + e^{y'}|(\frac{1}{y}h + e^{y'}h')^2(\ln y + e^{y'})dx +$$

$$+2\int_a^b sign(\ln y + e^{y'})(\frac{1}{y}h + e^{y'}h')^2(\ln y + e^{y'})dx.$$

Пример 4.42. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_a^b (\sin y' - yx)|\sin y' - yx|dx.$$

$f(x,y,z) = \sin z - yx, \quad f_y = -x, \quad f_z = \cos z, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{y^2} = 0, \quad f_{z^2} = -\sin z.$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \int_a^b |\sin y' - yx|(-xh + \cos y'h')^2(\sin y' - yx)dx+$$

$$+2\int_{(f\neq 0)} sign(\sin y' - yx)(-xh + \cos y'h')^2 \cdot (\sin y' - yx)dx + [-2,+2]\int_{(f=0)} (-\sin y')h'^2 dx.$$

В частности, если $mes(\sin y' - yx = 0) = 0$, то оценка переходит в точное равенство:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = \int_a^b |\sin y' - yx|(-xh + \cos y'h')^2(\sin y' - yx)dx+$$

$$+2\int_a^b sign(\sin y' - yx)(-xh + \cos y'h')^2(\sin y' - yx)dx.$$

Пример 4.43. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_a^b (\log_2 y + y'^3)|\log_2 y + y'^3|dx.$$

$$f(x,y,z) = \log_2 y + z^3, \quad f_y = \frac{1}{y\ln 2}, \quad f_z = 3z^2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{y^2} = -\frac{1}{y^2\ln 2}, \quad f_{z^2} = 6z.$$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \int_a^b |\log_2 y + y'^3|(\frac{1}{y\ln 2}h + 3y'^2h')^2(\log_2 y + y'^3)dx+$$

$$+2 \int\limits_{(f\neq 0)} sign(\log_2 y + y'^3)(\frac{1}{y\ln 2}h + 3y'^2 h')^2(\log_2 y + y'^3)dx+$$

$$+[-2,+2] \int\limits_{(f=0)} (-\frac{1}{y^2\ln 2}h^2)dx + [-2,+2] \int\limits_{(f=0)} (6y'h'^2)dx.$$

В частности, если $mes(\log_2 y + y'^3 = 0) = 0$, то оценка переходит в точное равенство:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = \int\limits_a^b |\log_2 y + y'^3|(\frac{1}{y\ln 2}h + 3y'^2 h')^2(\log_2 y + y'^3)dx+$$

$$+2 \int\limits_a^b sign(\log_2 y + y'^3)(\frac{1}{y\ln 2}h + 3y'^2 h')^2(\log_2 y + y'^3)dx.$$

Пример 4.44. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (y'\sin y - \cos y' + 5x)|y'\sin y - \cos y' + 5x|dx.$$

Пример 4.45. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (y^2 + yy' + y'^2)|y^2 + yy' + y'^2|dx.$$

Пример 4.46. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (y^2 + y' + x)|y^2 + y' + x|dx.$$

Пример 4.47. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (2yy' + x)|2yy' + x|dx.$$

Пример 4.48. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (y^2 y'^2)|y^2 y'^2| dx.$$

Пример 4.49. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (y'^2 + yx)|y'^2 + yx| dx.$$

Пример 4.50. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (2y + 3y'x)|2y + 3y'x| dx.$$

Пример 4.51. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (5y'x + 1)|5y'x + 1| dx.$$

Пример 4.52. Найти оценку второго K–субдифференциала вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b (2y + x + 5)|y + x + 5| dx.$$

4.4 K–аналог необходимого условия Лежандра.

Пример 4.53. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y' \cdot |y'| - y^2) dx \quad (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1).$$

Ограничимся рассмотрением функций $y \in C^1[0; T]$, для которых множество стационарных точек имеет нулевую меру: $mes(y' \cdot |y'| - y^2 = 0) = 0$. Для таких функций уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{ll} y'' + y = 0 & \text{при } y' > 0 \\ \text{(почти всюду на } [0; T]) \ ; & \\ y'' - y = 0 & \text{при } y' < 0. \end{array} \right. \qquad (4.13)$$

Далее,

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') = \begin{cases} 2, & y' \geq 0 \\ -2, & y' < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ни одна немонотонная функция не удовлетворяет сопряженному неравенству для максимума:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') \leq 0 \text{ почти всюду на [a;b].}$$

Среди монотонных функций (при данных граничных условиях) уравнению (4.13) удовлетворяют функции $y = \sin x$ и $y = sh\, x / sh\, \frac{\pi}{2}$.

Примеры:

Пример 4.54. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4y'|y'| + \frac{1}{2}y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0;\frac{\pi}{2}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1).$$

Ограничимся рассмотрением функций $y \in \mathrm{C}^1[0;\dfrac{\pi}{2}]$, для которых множество стационарных точек имеет нулевую меру: $mes(4y'|y'| + \frac{1}{2}y^2 = 0) = 0$. Для таких функций уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$f_y - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial z}) = 0 \quad \text{почти всюду.}$$

$$f = 4z|z| + \frac{1}{2}y^2; \quad f_y = y; \quad f_z = \pm 2z; \quad f_{z^2} = 8 sign z\, (z \neq 0).$$

$$\begin{cases} y - 8y'' = 0,\ y' \geqslant 0; \\ y + 8y'' = 0,\ y' \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y'' - y = 0,\ y' \geqslant 0; \\ 8y'' + y = 0,\ y' \leqslant 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} c_1 \operatorname{sh} \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x + c_2 \operatorname{ch} \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x,\ y' \geqslant 0; \\ c_3 \sin \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x + c_4 \cos \dfrac{1}{2\sqrt{2}}x,\ y' \leqslant 0. \end{cases}$$

1) Если y не монотонная функция (y' меняет знак), то

$$\exists x_1, x_2 : \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x_1) = 8 > 0,\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x_2) = -8 < 0$$

$\Rightarrow$ условие Лежандра не выполняется (нет ни max, ни min).

2) Если y монотонная функция, то

$$\Phi(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4y'^2+\frac{1}{2}y^2)dx.$$

Для таких функций уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид:

$$f_y-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial z})=0.$$

$f=4z^2+\frac{1}{2}y^2;\quad f_y=y;\quad f_z=8z;\quad f_{z^2}=8.$

$$8y''-y=0;$$

$$y=c_1\operatorname{sh}\frac{1}{2\sqrt{2}}x+c_2\operatorname{ch}\frac{1}{2\sqrt{2}}x;$$

$y(0)=c_2=0;\quad y(\frac{\pi}{2})=c_1\operatorname{sh}\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+c_2\operatorname{ch}\frac{\pi}{4\sqrt{2}}=1;\quad c_1=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4\sqrt{2}}};$

$$y=\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}\quad\text{—extr.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=8>0\Rightarrow f\mapsto\min.$$

Пример 4.55. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}(-9y'|y'|+3y^2)dx\quad(y\in \mathrm{C}^1[0;\frac{\pi}{2\sqrt{3}}],\ y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2\sqrt{3}})=1).$$

Ограничимся рассмотрением функций $y\in \mathrm{C}^1[0;\frac{\pi}{2\sqrt{3}}]$, для которых множество стационарных точек имеет нулевую меру: $mes(-9y'|y'|+3y^2=0)=0$. Для таких функций уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$f_y-\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial z})=0\quad\text{почти всюду.}$$

$f=-9z|z|+3y^2;\quad f_y=6y;\quad f_z=\mp18z;\quad f_{z^2}=\mp18.$

$$\left\{\begin{array}{l}6y+18y''=0,\ y'\geqslant0;\\ 6y-18y''=0,\ y'\leqslant0;\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3y''+y=0,\ y'\geqslant0;\\ 3y''-y=0,\ y'\leqslant0;\end{array}\right.$$

$$y = \begin{cases} c_1 \sin \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + c_2 \cos \dfrac{1}{\sqrt{3}}x, \ y' \geqslant 0; \\ c_3 \operatorname{sh} \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + c_4 \operatorname{ch} \dfrac{1}{\sqrt{3}}x, \ y' \leqslant 0. \end{cases}$$

1) Если y не монотонная функция (y' меняет знак), то

$$\exists x_1, x_2 : \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x_1) = -18 < 0, \ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x_2) = 18 > 0$$

$\Rightarrow$ условие Лежандра не выполняется (нет ни max, ни min).

2) Если y монотонная функция, то

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} (-9y'^2 + 3y^2)dx.$$

Для таких функций уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид:

$$f_y - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial z}) = 0$$

$f = -9z^2 + 3y^2; \quad f_y = 6y; \quad f_z = -18z; \quad f_{z^2} = -18.$

$$3y'' + y = 0;$$

$$y = c_1 \sin \frac{1}{\sqrt{3}}x + c_2 \cos \frac{1}{\sqrt{3}}x;$$

$$y(0) = c_2 = 0; \quad y(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}) = c_1 \sin \frac{\pi}{6} + c_2 \cos \frac{\pi}{6} = 1; \quad c_1 = 2;$$

$$y = 2 \sin \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{—extr.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -18 < 0 \Rightarrow f \mapsto \max.$$

Пример 4.56. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\sqrt{10}\pi}^{\frac{\sqrt{10}\pi}{2}} (-5y'|y'| + \frac{1}{2}y^2)dx$$

$$(y \in \mathrm{C}^1[-\sqrt{10}\pi; \frac{\sqrt{10}\pi}{2}], \ y(-\sqrt{10}\pi) = 1, \ y(\frac{\sqrt{10}\pi}{2}) = 0).$$

Ограничимся рассмотрением функций $y \in \mathrm{C}^1[-\sqrt{10}\pi; \dfrac{\sqrt{10}\pi}{2}]$, для которых множество стационарных точек имеет нулевую меру: $mes(-5y'|y'| + \frac{1}{2}y^2 = 0) = 0$. Для таких функций уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$f_y - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial z}) = 0 \quad \text{почти всюду.}$$

$$f = -5z|z| + \frac{1}{2}y^2; \quad f_y = y; \quad f_z = \mp 10z; \quad f_{z^2} = \mp 10.$$

$$\begin{cases} y + 10y'' = 0, \ y' \geqslant 0; \\ y - 10y'' = 0, \ y' \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10y'' + y = 0, \ y' \geqslant 0; \\ 10y'' - y = 0, \ y' \leqslant 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} c_1 \sin\dfrac{1}{\sqrt{10}}x + c_2 \cos\dfrac{1}{\sqrt{10}}x, \ y' \geqslant 0; \\ c_3 \operatorname{sh}\dfrac{1}{\sqrt{10}}3x + c_4 \operatorname{ch}\dfrac{1}{\sqrt{10}}x, \ y' \leqslant 0. \end{cases}$$

1) Если y не монотонная функция (y' меняет знак), то

$$\exists x_1, x_2 : \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x_1) = -10 < 0, \ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x_2) = 10 > 0$$

$\Rightarrow$ условие Лежандра не выполняется (нет ни max, ни min).

2) Если y монотонная функция, то

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\sqrt{10}\pi}^{\frac{\sqrt{10}\pi}{2}} (-5y'^2 + \frac{1}{2}y^2)dx.$$

Для таких функций уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид:

$$f_y - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial z}) = 0$$

$$f = -5z^2 + \frac{1}{2}y^2; \quad f_y = y; \quad f_z = -10z; \quad f_{z^2} = -10.$$

$$10y'' + y = 0;$$

$$y = c_1 \sin\frac{1}{\sqrt{10}}x + c_2 \cos\frac{1}{\sqrt{10}}x;$$

$y(-\sqrt{10}\pi) = c_1 \sin(-\pi) + c_2 \cos(-\pi) = 1; \quad c_2 = -1;$
$y(\dfrac{\sqrt{10}\pi}{2}) = c_1 \sin\dfrac{\pi}{2} + c_2 \cos\dfrac{\pi}{2} = 0; \quad c_1 = 0;$

$$y = -\cos\frac{1}{\sqrt{10}}x \quad \text{—extr.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -10 < 0 \Rightarrow f \mapsto \max .$$

Пример 4.57. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y'|y'| + y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0; \frac{\pi}{2}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1).$$

Пример 4.58. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} (\frac{1}{3}y'|y'| + y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0; \frac{\pi}{\sqrt{3}}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{\sqrt{3}}) = \operatorname{sh}\pi).$$

Пример 4.59. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{6}}} (\frac{1}{4}y'|y'| - \frac{3}{2}y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0; \frac{\pi}{2\sqrt{6}}],\ y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{2\sqrt{6}}) = 0).$$

Пример 4.60. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{\sqrt{11}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{11}}} (y'|y'| - 11y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[-\frac{\pi}{\sqrt{11}}; \frac{\pi}{2\sqrt{11}}],\ y(-\frac{\pi}{\sqrt{11}}) = -1,\ y(\frac{\pi}{2\sqrt{11}}) = 0).$$

Пример 4.61. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (7y'|y'| + 3y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0; \frac{\pi}{2}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1).$$

Пример 4.62. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (y'|y'| - 9y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}],\ y(-\frac{\pi}{3}) = 1,\ y(\frac{\pi}{6}) = 0).$$

Пример 4.63. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{2}y'|y'| + 9y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0; \frac{\pi}{3}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{3}) = 1).$$

Пример 4.64. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} (y'|y'| - \frac{1}{2}y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0; \frac{\pi}{\sqrt{2}}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = 1).$$

Пример 4.65. Проверить обобщенное необходимое условие Лежандра для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\frac{\sqrt{5}\pi}{4\sqrt{7}}} (5y'|y'| - 7y^2)dx \quad (y \in \mathrm{C}^1[0; \frac{\sqrt{5}\pi}{4\sqrt{7}}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\sqrt{5}\pi}{4\sqrt{7}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

4.5 K–аналог достаточных условий Лежандра–Якоби.

Пример 4.66. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y'^2 - y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1\Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big],\ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1,\ y\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -sh\,\frac{\pi}{2}\Big). \tag{4.14}$$

Здесь уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} y'' + y = 0 \ \ (y' \geq 0); \\ y'' - y = 0 \ \ (y' \leq 0). \end{array}\right.$$

Таким образом, функция $y = \sin x$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$, $y = -shx$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0)$, является субэкстремалью функционала (4.14); при этом $y \in C^2[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

"*Нижнее*" условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') = 2 > 0.$$

"*Нижнее*" уравнение Якоби принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} h''+h=0\,(y'\geq 0);\\ \Big(h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\Big)\\ h''-h=0\,(y'\leq 0). \end{array}\right.$$

Отсюда

$$h(x)=\begin{cases}\sin x\cdot ch\,\frac{\pi}{2}+\cos x\cdot sh\,\frac{\pi}{2} & (0\leq x\leq\frac{\pi}{2});\\ sh\,\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & (-\frac{\pi}{2}\leq x\leq 0),\end{cases}$$

и условие Якоби для уравнения, как легко видеть, выполнено.

Таким образом, вариационный функционал (4.14) достигает на субэкстремали

$$y=\begin{cases}\ \sin x, & (0\leq x\leq\frac{\pi}{2});\\ -sh\,x, & (-\frac{\pi}{2}\leq x\leq 0);\end{cases}$$

строгого локального минимума.

Примеры:

Пример 4.67. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+y|y|)dx\quad\Big(y\in C^1\Big[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\Big],\ y(\frac{\pi}{2})=1,\ y(-\frac{\pi}{2})=0\Big).$$

Здесь уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} y''-y=0,\ (y'\geq 0),\\ \ y''+y=0,\ (y'\leq 0) \end{array}\right.$$

Таким образом, функция $y=\sin x\ \ (0\leq x\leq\frac{\pi}{2}), y=\mathrm{sh}x\ (-\frac{\pi}{2}\leq x\leq 0)$ вляется субэкстремалью функционала; при этом $y\in C^2\Big[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big]$.

«Нижнее» условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')=2>0$$

Получаем:

$$\left[\begin{array}{c} h''-h=0,\ (y'\geq 0),\\ h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\\ h''-h=0,\ (y'\leq 0) \end{array}\right.$$

$$h = \mathrm{sh}\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big) > 0 \ (-\frac{\pi}{2} \le x \le 0)$$

и условие Якоби для уравнения, как легко видеть, выполнено.

Из уравнения получаем:

$$\left[\begin{array}{c} h''+h=0,\ (y'\ge 0),\\ h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\\ h''+h=0,\ (y'\le 0)\end{array}\right.$$

Отсюда

$$h=\cos x>0,(0\le x\le\frac{\pi}{2})$$

и условие Якоби для уравнения, как легко видеть, выполнено.

Таким образом, вариационный функционал достигает на субэкстремали

$$y=\begin{cases}\sin x,(0\le x\le\frac{\pi}{2})\\ \mathrm{sh} x\ (-\frac{\pi}{2}\le x\le 0)\end{cases}$$

строгого локального минимума.

Пример 4.68. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\Phi(y)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2y'^2-3y|y|)dx \quad \Big(y\in C^1\Big[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big],\ y(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ y(-\frac{\pi}{2})=\mathrm{sh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big)$$

Здесь уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{c} 2y''+3y=0,\ (y'\ge 0),\\ 2y''-3y=0,\ (y'\le 0)\end{array}\right.$$

Таким образом, функция $y=\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x\ (0\le x\le\frac{\pi}{2}), y=\mathrm{sh}\sqrt{\frac{3}{2}}x\ (-\frac{\pi}{2}\le x\le 0)$ вляется субэкстремалью функционала; при этом $y\in C^2\Big[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big]$.

«Нижнее» условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')=4>0$$

Получаем:

$$\left[\begin{array}{c} h''+3h=0,\ (y'\ge 0),\\ h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\\ h''-3h=0,\ (y'\le 0)\end{array}\right.$$

Отсюда

$$h = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x\mathrm{ch}\Big(\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big) + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x\mathrm{sh}\Big(\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big)\ (0 \le x \le \frac{\pi}{2}), \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{sh}\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big)\ (-\frac{\pi}{2} \le x \le 0) \end{cases}$$

и условие Якоби для уравнения, как легко видеть, выполнено.

Имеем:

$$\left[\begin{array}{c} 2h'' - 3h = 0,\ (y' \ge 0), \\ h(-\dfrac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\dfrac{\pi}{2}) = 1 \\ 2h'' + 3h = 0,\ (y' \le 0) \end{array}\right.$$

Отсюда

$$h = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{ch}\sqrt{\frac{3}{2}}x + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{sh}\sqrt{\frac{3}{2}}x\ (0 \le x \le \frac{\pi}{2}), \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big)\ (-\frac{\pi}{2} \le x \le 0) \end{cases}$$

Таким образом, вариационный функционал достигает на субэкстремали

$$y = \begin{cases} \sin\sqrt{\frac{3}{2}}x\ (0 \le x \le \frac{\pi}{2}), \\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{3}{2}}x\ (-\frac{\pi}{2} \le x \le 0) \end{cases}$$

строгого локального минимума.

Пример 4.69. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (9y'^2 + 4y|y|)dx \quad (y \in C^1[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}];\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ y(-\frac{\pi}{2}) = -sh\frac{\pi}{3}). \tag{4.15}$$

Здесь уравнение Эйлера - Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} 9y'' + 4y = 0\ (y' \ge 0) \\ 9y'' - 4y = 0\ (y' \le 0) \end{array}\right.$$

Таким образом, функция $y = \sin\frac{2}{3}x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$, $y = sh\frac{2}{3}x$ $(-\frac{\pi}{2} \le x \le 0)$ является субэкстремалью функционала (4.15) ; при этом $y \in C^2[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

«Нижнее» условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') = -8 < 0$$

Так как $\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}} = 0$, то уравнения Якоби представимы следующим образом:

$$\frac{d}{dx}[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')h'] + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')h = 0$$

$$\frac{d}{dx}[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')h'] + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')h = 0$$

Уравнение Якоби принимает вид:

$$\left[\begin{array}{c} 9h'' - 4h = 0 \ (y' \geq 0) \\ h(-\frac{\pi}{2}) = 0, \ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1 \\ 9h'' + 4h = 0 \ (y' \leq 0) \end{array}\right.$$

Отсюда

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} ch\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} sh\frac{2}{3}x, \ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}), \ (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0) \end{cases}$$

и условие Якоби выполнено.

Имеем:

$$\left[\begin{array}{c} 9h'' + 4h = 0 \ (y' \geq 0) \\ h(-\frac{\pi}{2}) = 0, \ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1 \\ 9h'' - 4h = 0 \ (y' \leq 0) \end{array}\right.$$

Отсюда

$$h(x) = \begin{cases} sh\frac{\pi}{3}\cos\frac{2}{3}x + ch\frac{\pi}{3}\sin\frac{2}{3}x, \ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ sh(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}), \ (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0) \end{cases}$$

условие Якоби выполнено.

Так как $\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}} = 0$, то и уравнения Якоби вырождаются в два условия.

Таким образом, вариационный функционал достигает на субэкстремали

$$y = \begin{cases} \sin\frac{2}{3}x, \ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ sh\frac{2}{3}x, \ (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0) \end{cases}$$

строгого локального максимума.

Пример 4.70. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} (4y'^2 - 25y|y|)dx \quad (y \in C^1[-\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{5}];\ y(\frac{\pi}{5}) = 1,\ y(-\frac{\pi}{2}) = -sh\frac{\pi}{2}).$$

Пример 4.71. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2y'^2 - y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1\Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big],\ y(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ y(-\frac{\pi}{2}) = \mathrm{sh}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\Big).$$

Пример 4.72. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - 3y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1\Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big],\ y(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi\sqrt{3}}{2},\ y(-\frac{\pi}{2}) = \mathrm{sh}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\Big).$$

Пример 4.73. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4y'^2 - 9y|y|)dx \quad (y \in C^1[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}];\ y(\frac{\pi}{3}) = 1,\ y(-\frac{\pi}{3}) = -sh\frac{\pi}{2}).$$

Пример 4.74. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (y'^2 - 9y|y|)dx \quad (y \in C^1[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}];\ y(\frac{\pi}{6}) = 1,\ y(-\frac{\pi}{6}) = -sh\frac{\pi}{2}).$$

Пример 4.75. Проверить обобщенные достаточные условия Лежандра–Якоби для вариационного функционала:

$$\phi(y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (9y'^2 - 4y|y|)dx \quad (y \in C^1[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}];\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ y(-\frac{\pi}{2}) = -sh\frac{\pi}{3}).$$

5. Примеры прикладных задач с использованием выпуклого анализа

5.1 Задачи о справедливом разделе ресурсов

Мы часто сталкиваемся с вопросами распределения каких-либо предметов, ресурсов; эти вопросы нередко вызывают споры. Задача о справедливом разделе ресурсов (сокровищ) изучается математиками, начиная с 1940-х годов. Идейной базой для этих исследований, как правило, служит теорема А. А. Ляпунова, которая утверждает выпуклость образа безатомной векторной меры в конечномерных пространствах. Позже появились работы Неймана и Штейнгауза, в которых рассмотрены приложения основного результата Ляпунова к задаче о разделе сокровищ (ресурсов). Задачу о разделе ресурсов можно сформулировать следующим образом.

Задача 5.1. *Пусть имеется n лиц, которые оценивают части делимого объекта $A \in \Sigma$ с помощью числовых мер $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, заданных на некоторой σ-алгебре Σ. Полагаем, что оценка делимого множества A одинакова для всех лиц:* $\mu_1(A) = \mu_2(A) = ... = \mu_n(A) = 1$. *Возможно ли устроить разбиение множества A на непересекающиеся множества $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup ... \bigcup A_n$ так, чтобы $\mu_k(A_i) = \frac{1}{n}$ $\forall k, i = \overline{1,\ n}$?*

В известном результате о разрешимости такой задачи предполагалось, что для оценки сокровищ используются меры, а добыча бесконечно делима (каждый разбойник может разделить множество на произвольное число частей, равных с его точки зрения). Это условие бесконечной делимости означает не что иное, как безатомность мер $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Оказывается, что при таком условии искомое разбиение возможно.

Проблеме справедливого раздела ресурсов посвящено множество работ работ. Как правило, в задачах такого рода считают, что участники спора используют монотонные, аддитивные, вероятностные меры для оценивания частей делимых объектов. Однако можно встретить и работы, в которых для моделирования соответствующих задач рассматриваются также и неаддитивные функции множества.

В частности, использование мер невозможно в случаях пренебрежения достаточно малыми или большими множествами (частями делимых объектов), поскольку возникающие при этом функции множеств теряют свойство аддитивности. Такая постановка задачи о разделе ресурсов рассматривалась нами в недавней работе [8] с использованием понятия квазимеры множества. Сначала приведём вспомогательные понятия.

Определение 5.1. *Функция множества* $(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ ρ *называется* ***монотонной****, если* $\forall A, B \in \Phi : A \supset B \quad \rho(A) \geqslant \rho(B)$.

Также мы используем аналог свойства Дарбу, которое названо нами промежуточной непрерывностью.

Определение 5.2. *Пусть* ρ *— функция множества* $(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. *Она называется* ***промежуточно непрерывной****, если для* $\forall A, B \in \Phi : A \subset B$, $\rho(A) = a\ (a > 0),\ \ \rho(B) = b\ \ (b > a)\ \ \forall c \in (a; b)\ \exists C \in \Phi : \rho(C) = c,\ \ A \subset C \subset B$.

В работе также будет использовано и классическое свойство полунепрерывности сверху.

Определение 5.3. *Функция множества* $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ *называется* ***полунепрерывной сверху****, если для* $\forall A_1, \ldots, A_n, \dots \in \Phi : A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset$
$\supset A_n \supset \ldots :$

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n).$$

Приведём теперь определение понятия квазимеры из работы [8].

Определение 5.4. *Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве)* $\mathfrak{R}$ *задана система множеств* Φ *и на* Φ *задана функция* ρ

$(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. *Будем говорить, что* ρ *—* ***квазимера****, если:*

1. $\forall A \in \Phi\colon \rho(A) \geqslant 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0;$

2. ρ *монотонна по определению 5.1;*

3. ρ *промежуточно непрерывна по определению 5.2;*

4. ρ *полунепрерывна сверху по определению 5.3.*

Рассмотрим некоторые примеры квазимер над системой множеств, каждое из которых является объединением отрезков на прямой.

$$\Phi = \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m, \beta_m) \mid \alpha_m, \beta_m \in R, [\alpha_k; \beta_k) \bigcap [\alpha_m; \beta_m) = \varnothing\ \ (k \neq m) \right\},\ \text{где } R = [0; 1).$$

Эта система является монотонным классом множеств.

Пример 5.1.

$$\rho_\varepsilon^{**}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon \end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Пример 5.2.

$$\rho_\varepsilon^2\left(\bigcup_{m=1}^{n}[\alpha_m;\beta_m)\right)=\begin{cases}\left(\sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|\right)^2, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|\geqslant\varepsilon\\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|<\varepsilon\end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon>0$.

Пример 5.3.

$$\rho_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{m=1}^{n}[\alpha_m;\beta_m)\right)=\begin{cases}\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|}, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|\geqslant\varepsilon\\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|<\varepsilon\end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon>0$.

Эти примеры моделируют вышеупомянутые ситуации пренебрежения «малыми» множествами. При этом все вышеуказанные квазимеры не будут мерами, так как не удовлетворяют свойству аддитивности. Это можно легко обнаружить, если взять два множества, каждое из которых имеет нулевую оценку, но объединение которых имеет ненулевую оценку.

На базе понятия квазимеры можно удалось доказать разрешимость задачи о разделе ресурсов в равном отношении. Однако подход к проблеме на базе квазимер не позволил исследовать геометрические свойства образов квазимер в смысле получения аналога теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости для квазимер. Это помешало доказать возможность раздела объектов в любом заданном отношении, а не только лишь на равные части. Устранение данного недостатка направлена работа [9], в которой была поставлена задача так ввести аналог понятия меры для оценки частей делимых ресурсов, чтобы удалось получить возможность справедливого раздела не только в равных отношениях, но и в различных. Для этого необходимо получить фундаментальный результат — аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа меры в какой-то форме. А для такой задачи уже понятие квазимеры из [8] не подходит. В работе [9] предложен следующий аналог понятия квазимеры — понятие ε-квазимеры множества. Это понятие позволяет учесть пренебрежение «малыми» множествами и при этом сохранить в некотором смысле свойство аддитивности. Остановимся подробно на результатах.

Определение 5.5. *Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве)* $\mathfrak{R}$ *задана система множеств* Φ *и на* Φ *задана функция* ρ

($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$). *Будем говорить, что* ρ *—* ε*-**квазимера**, если:*

1. $\forall A \in \Phi : \rho(A) \geqslant 0; \;\; \rho(\varnothing) = 0;$

2. ρ *монотонна по определению 5.1;*

3. ρ *промежуточно непрерывна по определению 5.2;*

4. ρ *полунепрерывна сверху по определению 5.3;*

5. $\forall A, B\colon \rho(A) \geqslant \varepsilon, \rho(B) \geqslant \varepsilon, A \cap B = \varnothing\colon \rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B).$

Как можно заметить, среди рассмотренных выше примеров 5.1 — 5.3 только отображение из примера 5.1 будет удовлетворять определению ε-квазимеры. Для ε-квазимер справедлив следующий аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной ε-квазимеры. Всюду до конца п. 2.3 мы полагаем, что Φ — монотонный класс множеств.

Теорема 5.1. *Если* $\vec{\rho}$ *— векторная* ε*-квазимера, то множество* $\vec{\rho}(\Phi)$ ***квазивыпукло**, то есть*

$$\forall A, B \in \Phi\colon \rho_i(A) > \varepsilon, \rho_i(B) > \varepsilon \; \forall 1 \leqslant i \leqslant n \; \exists C \in \Phi\colon \vec{\rho}(C) = \frac{\vec{\rho}(A) + \vec{\rho}(B)}{2}.$$

На основании построенной теории ε-квазимер можно предложить вариант решения задачи о разделе сокровищ разбойниками, если каждый из этих разбойников использует ε-квазимеру для оценки частей сокровищ. При этом ввиду теоремы 5.1 рассмотрена следующая несколько усиленная формулировка задачи.

Задача 5.2. *Группа из n жадных, но честных разбойников желает разделить добычу в некотором заданном отношении* $\lambda_1 : \lambda_2 : ... : \lambda_n$ ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ *и для определённости можно положить, что* $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$). *При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей меркой, то есть, подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по-своему. Будем полагать, что каждый работник использует для оценки сокровищ* ε*-квазимеры, заданные на монотонном классе множеств* Φ*. При каких условиях на* ε*-квазимеры, используемые разбойниками для оценки частей делимых сокровищ, такой раздел будет возможным?*

В работе [9] доказана разрешимость поставленной задачи 5.2.

Теорема 5.2. *Пусть* $\vec{\rho}$ *— векторная* ε*-квазимера, а множество* $A \in \Phi$ *такое, что* $\vec{\rho}(A) = (1, 1, \ldots, 1)$. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *— набор чисел, причём* $\lambda_i \geqslant \varepsilon \; \forall i$ *и* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. *Тогда* $\exists L_1, L_2, \ldots, L_n \subset A\colon,\ L_i \in \Phi$

$$\rho_i(L_j) = \lambda_i \quad \forall i, j = \overline{1, n},$$

где $L_i \cap L_j = \varnothing (i \neq j)$ *и* $A \backslash (L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) = \varnothing$.

Рассмотрим теперь такой аналог задачи о справедливом разделе ресурсов для бесконечного числа мер.

Задача 5.3. *Будем обозначать делимые ресурсы через некоторое множество A и полагать, что его части (на которые возможен раздел) образуют σ-алгебру Σ подмножеств A. На Σ задано бесконечное количество числовых мер $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $\mu_1(A) = \mu_2(A) = ... = \mu_n(A) = ... = 1$. Можно ли устроить разбиение множества A на непересекающиеся множества $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ так, чтобы*

$$\mu_n(A_k) = \lambda_k \quad \forall n, k \in \mathbb{N},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ — фиксированный сходящийся ряд из положительных чисел?

Задаче 5.3 можно придать такой смысл. Пусть имеется объект и некоторый набор его подмножеств (σ-алгебра подмножеств). Предположим, что имеется счётное количество различных критериев оценки делимых частей исходного объекта, но сам объект одинаков с точки зрения этих критериев. Ставится вопрос о возможности построения такого разбиения исходного объекта на части, чтобы это деление удовлетворяло всем рассматриваемым критериям. По сути это как бы «сглаживание» оценок какого-либо множества с точки зрения бесконечного числа критериев.

Для исследования задачи 5.3 естественно рассмотреть пространство ℓ_∞ и векторную меру

$$\overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...) : \Sigma \to \ell_\infty.$$

По условию $\overrightarrow{\mu}(A) = (1, 1, ..., 1, ...)$ и $\overrightarrow{\mu}(\varnothing) = (0, 0, ..., 0, ...)$. Разрешимость задачи 5.3 равносильна выпуклости $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ при произвольном выборе меры $\overrightarrow{\mu}$. А это неверно, как показано А.А. Ляпуновым даже для векторных мер со значениями в пространстве ℓ_1. Воспользоваться теоремой Ула (этот результат предполагает, что пространство обладает свойством Радона-Никодима) или свойством Ляпунова нельзя, поскольку пространство числовых последовательностей ℓ_∞ не имеет ни свойства Радона-Никодима, ни свойства Ляпунова.

Для того, чтобы сформулировать полученные результаты, нам потребуется понятие антикомпактного множества в банаховых пространствах, введённое и исследованное нами в [10, 11]. Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых (или выпуклых симметричных) подмножеств банахова пространства E. Здесь и всюду далее под $p_{C'}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского выпуклого симметричного множества $C' \subset E$.

Определение 5.6. *Назовем множество $C' \in \Omega_{ac}$ антикомпактным в E, если:*

(i) $p_{C'}(a) = 0 \iff a = 0$ *в* E *(или* $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot C' = \{0\}$*);*

(ii) любое ограниченное подмножество E *содержится и предкомпактно в пространстве* $E_{C'} = (span\ C',\ p_{C'}(\cdot))$*. Здесь мы считаем что* $E_{C'}$ *пополнено относительно нормы* $\|\cdot\|_{C'} = p_{C'}(\cdot)$*.*

Примем обозначение: $\mathcal{C}'(E)$ *— набор антикомпактных подмножеств пространства* E*.*

Построены примеры системы антикомпактных множеств в сепарабельных гильбертовых и банаховых пространствах.

Пример 5.4. Пусть Е $= H \cong \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство. В таких пространствах существует система так называемых эллипсоидов. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...)$ — последовательность положительных чисел. Для каждой такой последовательности ε эллипсоидом называется следующее множество

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Доказано, что C_ε компактно тогда и только тогда, когда $\varepsilon \to 0$. Отметим, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порождённая C_ε в пространстве $H_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 5.1. *Если* $\varepsilon \to \infty$*, то* C_ε *— антикомпакт.*

Замечание 5.1. Предыдущий пример позволяет объяснить смысл термина «антикомпактность». Дело в том, что условие компактности эллипсоида $\varepsilon \to 0$ в некотором смысле есть противопоставление условию антикомпактности эллипсоида $\varepsilon \to +\infty$.

Возвращаемся к проблеме разрешимости задачи 5.3. Сформулируем полученный результат.

Теорема 5.3. *Пусть* $\overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ...) : \Sigma \to \ell_\infty$ *— безатомная (счётно-аддитивная) векторная мера и множество* A *такое, что* $\overrightarrow{\mu}(A) = (1, 1, ...)$*. Тогда существует система последовательностей множеств* $\{A_{k,i}\}_{i,k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ *такая, что* $A_{k,i} \bigcap A_{\ell,i} = \varnothing$ *при* $k \neq \ell$*,* $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,i} = A$ *и*

$$H_{C'} - \lim_{i\to\infty} (\mu_1(A_{k,i}), \mu_2(A_{k,i}), ...\mu_n(A_{k,i}), ...) = (\lambda_k, \lambda_k, ..., \lambda_k, ...)$$

где сходимость берётся в некотором гильбертовом пространстве $H_{C'}$, порождённом антикомпактом в H (в доказательстве устанавливается его конкретный вид), а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ — фиксированный ряд положительных чисел.

Из предыдущего результата следует

Следствие 5.1. *Пусть $\overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ...) : \Sigma \to \ell_\infty$ — безатомная (счётно-аддитивная) векторная мера и множество A такое, что $\overrightarrow{\mu}(A) = (1, 1, ...)$. Тогда существует система последовательностей множеств $\{A_{k,i}\}_{i,k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ такая, что $A_{k,i} \bigcap A_{\ell,i} = \varnothing$ при $k \neq \ell$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,i} = A$ и*

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{k,i}) = \lambda_k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ — фиксированный ряд положительных чисел.

5.2 Об аналоге задачи о кратчайших сетях

Задача Штайнера — классическая экстремальная задача, состоящая в поиске на плоскости минимальной системы отрезков, затягивающей три данных точки. Обобщения задачи получаются путём изменения количества точек, метрики, размерности, весов рёбер, наложения дополнительных условий на количество и расположение узловых точек сети Штайнера, перехода к рассмотрению графов и т. д; исследования на эту тему продолжаются до сих пор. Различные постановки обобщений задачи Штайнера изучаются в таких областях как дискретная оптимизация, вычислительная геометрия, проблемы трассировки при проектировании СБИС (сверхбольших интегральных схем), беспроводных и проводных коммуникационных сетей, механических и электрических систем и т.д. Но при этом абсолютное большинство работ рассматривает минимальные по длине сети, соединяющие систему точек на плоскости, без учёта размеров объектов. Рассмотрим следующий вариант задачи, в котором учтены размеры рассматриваемых объектов.

Задача 5.4. *Пусть на плоскости даны три круга. Необходимо найти точку, для которой сумма расстояний до этих кругов минимальна, т.е. расстояние можно задать следующим образом:*

$$f_A(x_1, x_2) = \begin{cases} |\overrightarrow{XA}| - r_A, & \text{если } |\overrightarrow{XA}| \geq r_A; \\ 0, & \text{если } |\overrightarrow{XA}| < r_A. \end{cases}$$

Тогда целевая функция задачи суммы расстояний имеет следующий вид: $f(x_1, x_2) = f_A(x_1, x_2)+f_B(x_1, x_2)+f_C(x_1, x_2)$. Она выпукла и поэтому для решения задачи естественно использовать субдифференциал в смысле выпуклого анализа.

Определение 5.7. *Пусть $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпукла. Если*

$$\overline{x} \in \mathrm{dom}\varphi := \{x \in X : \varphi(x) \leqslant \infty\},$$

субдифференциал определяется как совокупность субградиентов φ в точке $\overline{x}$: $\partial\varphi := \{\overline{x} \in X^* : \langle x^*, x - \overline{x}\rangle \leqslant \varphi(x) - \varphi(\overline{x}) \forall x \in X\}$.

По известным свойствам субдифференциала выпуклых функций:
$\partial f = \partial f_A+\partial f_B+\partial f_C$. Можно показать, что субдифференциал функции расстояния до круга ω_A равен:

$$\partial f_A(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{XA}}{|\overrightarrow{XA}|}, \text{ если } X \notin \omega_A; \\ \left\{\alpha_A \dfrac{\overrightarrow{XA}}{|\overrightarrow{XA}|}\right\}_{0 \leq \alpha_A \leq 1}, \text{ если } X \in \partial\omega_A; \\ \overrightarrow{0}, \text{ если } X \in \mathrm{Int}\,\omega_A. \end{cases}$$

Здесь $\partial\omega_A$ — граница круга ω_A, а $\mathrm{Int}\,\omega_A$ — его внутренность. Аналогично для ω_B и ω_C. Условие минимальности точки X имеет вид:

$$\overrightarrow{0} \in \partial f(X).$$

Поскольку функция f выпукла, это необходимое условие минимума является и достаточным. С использованием данного условия можно получить следующий результат.

Теорема 5.4. *Положение точки минимума поставленной задачи 5.4 зависит от положения точки Ферма треугольника центров данных кругов; в зависимости от её расположения относительно данных кругов, будет верно одно из утверждений:*

1) если точка Ферма не лежит ни в одном из кругов, то точка минимума задачи совпадает с ней;

2) если точка Ферма лежит ровно в одном из кругов, то точка минимума задачи лежит на границе этого круга или же в этом круге существует целая хорда точек минимума (задающих одну и ту же минимальную сеть);

3) если точка Ферма лежит ровно в двух кругах (а значит, в их пересечении), то точка минимума задачи лежит на границе этого пересечения;

4) если точка Ферма лежит ровно в трёх кругах, то любая точка из, принадлежащая пересечению трёх кругов является точкой минимума задачи 5.4.

Список литературы

[1] Орлов И. В. Введение в сублинейный анализ// Современная математика. Фундаментальные направления. —2014. — т. 53. — С. 64 — 132.

[2] Стонякин Ф. С. Компактные характеристики отображений в локально выпуклых пространствах и их приложения в векторном интегрировании. // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Симферополь: 2011.

[3] Халилова З. И. Компактные субдифференциалы в банаховых конусах и их приложения в вариационном исчислении. // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Симферополь: 2014.

[4] Михалевич М. В., Сергиенко И. В. Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. – К.: Наукова думка, 2005. – 670 с.

[5] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 472 с.

[6] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

[7] Демьянов В. Ф., Рощина В. А. Обобщённые субдифференциалы и экзостеры. // Владикавказский математический журнал. – 2006. – Т. 8, №4. – С. 19-31.

[8] Стонякин Ф. С., Магера М. В., Розв'язання задачі про розділ скарбів для довільної кількості розбійників, *Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки»*, **26(65)**:1 (2013), 109–128.

[9] Стонякин Ф. С., Шпилёв Р. О., Аналог теоремы Ляпунова о выпуклости для ε-квазимер и её приложения к задаче о разделе ресурсов *Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки»*, **27(66)**:1 (2014), 112–124.

[10] Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры. // Динамические системы. —2013. — т. 31., вып. 3 – 4. — С. 281 – 288.

[11] Стонякин Ф. С. Антикомпакты и их приложения к аналогам теорем Ляпунова и Лебега в пространствах Фреше. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — т. 53. — С. 155 – 176.